La antiderivada

Una forma de ver la operación inversa de la derivación, clásicamente, se realiza de la siguiente forma:

Encontrar la función *f(x)* de la cual derivada es conocida.

Dada la diferencial de la función *df(x)* encontrar la función *f(x)*

$$df(x) = f'(x)dx = \phi(x)dx$$

La función que se pide se le conoce como integral de la diferencial dada y al procedimiento utilizado para encontrar la integral se le conoce como integración. Al igual que el símbolo de derivada, el símbolo de integración, cuyo operador nos indicara la operación mencionada, ha tenido toda una evolución que fue acompañado de rasgos históricos hasta llegar a símbolo

$$\int$$

Concretamente diremos que

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

aunque esta relación no es del todo general es correcta y nos será útil para incursionar el análisis de este concepto.

Así por ejemplo podemos tener $f_1(x)= 3x$ y con ello $f_1{'}(x)dx=3dx$ por lo que

$$\int 3dx = 3x$$

pero podemos observar que si la función es $f_2(x)= 3x+5= f_1(x)+5$ entonces $f_2{'}(x)dx=3dx$ por lo que

$$\int 3dx = 3x+5$$

podemos entonces pensar que en general pudimos agregar a $f_1(x)$ cualquier constante y tener el mismo diferencial por lo que una expresión mas general a considerar es la siguiente:

$$\int f'(x)dx = f(x)+c$$

a la constante c que se agrega se le conoce como constante de integración. A la expresión anterior se le conoce como integral indefinida.

Retomemos el ejemplo:

$$\int 3dx = 3x+5$$

que sucede si aplicamos el operador de derivadas en ambos miembros de la expresión:

$$\frac{d}{dx}\int 3dx = \frac{d}{dx}(3x+5) = 3$$

lo que hace pensar que al aplicar el operador de derivada al operador de Integración obtenemos la función a integrar. De forma mas general tendremos:

$$\frac{d}{dx}\int f'(x)dx = \frac{d}{dx}(f(x)+c) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}c = \frac{d}{dx}f(x)$$

$\therefore$

$$\frac{d}{dx}\int f'(x)dx = f'(x)$$

Como podemos observar el operador de derivada en una operador inverso al de integración, hemos concluido esto en base a la expresión anterior. Sin embargo, si el operador de integral antecede al símbolo de derivada la expresión no siempre será cierta, y en ocasiones, no siempre podremos obtener una solución.

Utilización de la integral $\int x^n dx$

Integremos las siguientes funciones

a) $f(x)=x^8$
b) $f(x)=x^{100}$
c) $f(x)=3x$
d) $f(x)=x^2+2x+1$

a) $f(x)=x^8$

$$\int x^8 dx = \frac{x^{8+1}}{8+1} + c = \frac{x^9}{9} + c$$

b) *f(x)=x*^{100}

$$\int x^{100}dx = \frac{x^{100+1}}{100+1} + c = \frac{x^{101}}{101} + c$$

c) *f(x)=3x*

como la integral cumple con la propiedad

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

entonces

$$\int 3xdx = 3\int xdx$$

ahora aplicando la fórmula

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

tendremos:

$$\int 3xdx = 3\int xdx = 3\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + c = \frac{3x^2}{2} + c$$

d) $f(x)=x^2 +2x+1$

para obtener la integración de este polinomio de segundo orden recordemos que

$$\int (f(x)+g(x)+h(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)dx + \int h(x)\,dx$$

podemos considerar que el polinomio $x^2 +2x+1$ se puede expresar como una suma de tres polinomios donde

$f(x)=x^2$; *g(x)=2x;* *h(x)=1*

es decir, de acuerdo al álgebra de funciones

s(x)= f(x)+g(x)+h(x)

por lo que

$$\int s(x)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx =$$
$$= \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int 1\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) + \left(\frac{x^2}{2} + c_2\right) + (x + c_3) =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + (c_1 + c_2 + c_3) =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

Uno de los métodos mas usuales para resolver las integrales es de la sustitución, realizado cuando se cambia una variable para regresar a la integral original. Este es un método principalmente usado cuando es difícil reconocer la integración de manera inmediata pero que parece intuitivo que se parece a una ya conocida, en ocasiones también es un buen recurso cuando el estudiante que inicia en el estudio de la solución de integrales aun le resulta difícil reconocer las fórmulas.

Ejemplos:

1. $\int e^{5x}dx$

$$\int e^{5x}dx$$

haciendo $u = 5x$ observamos que $dx = \frac{1}{5}du$ por lo que integraremos en realidad

$\int e^{u}\left(\frac{1}{5}du\right)$ como podemos extraer las constantes de la integral tendremos:

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{u}du = \frac{1}{5}e^{u} + c$$

que regresando a la sustitución inicial tenemos:

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} + c$$

2.- Integrar la función *f(h)=cos ah* mediante sustitución trigonométrica

$$\int \cos ah\ dh$$

se puede efectuar directamente reconociendo que el diferencial es *adh*, sin embargo hagámoslos por medio de la sustitución $u=ah$ por lo que si despejamos h tendremos

$$h = \frac{u}{a} \quad \therefore \quad dh = \frac{1}{a}du$$

utilizando esto en la integral tendremos:

$$\int \cos ah\ dh = \int \cos u \left(\frac{1}{a}du\right)$$

como la constante $\frac{1}{a}$ la podemos sacar de la integral tendremos:

$$\int \cos ah\ dh = \frac{1}{a}\int \cos u\ (du)$$

Pero la integral

$$\int \mathbf{cos}\, udu = senu + c$$

entonces

$$\int \cos ahdh = \frac{1}{a} senah + c$$

donde $c = c_1 + c_2 + c_3$ esto último pensando a la constante c como una constante general que engloba a las otras tres, este será un criterio ampliamente utilizado a lo largo de este curso, en lugar de poner para cada integral una constante como en este caso, solo se pondrá una solo constante de integración.

En esta sección nos enfocaremos a realizar algunos ejercicios que pertenecen a la categoría de las integrales trigonométricas.

1.-Encontrar la solución de las siguiente integrales

$a) \quad \int \cos 5x dx$

Recordemos que para encontrar la solución de una integral es necesario pensar en una fórmula que se parezca a la expresión, acto seguido encontraremos el diferencial de la función, así por ejemplo podríamos pensar el que la integral a resolver se parece a la siguiente fórmula:

$$\int \cos\theta \, d\theta = sen\ \theta \ + c$$

por lo que pensar en este tipo de integrar resulta confiable, veamos cual es el diferencial de *5x*. Su diferencial es *5dx* lo que nos induce a pensar que se requiere un 5 para tener completo el diferencial

$$a) \quad \int \cos 5x dx = \frac{5}{5}\int \cos\ 5x\, dx$$

como sabemos las constantes en la integrales cumplen con la siguiente propiedad

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

por lo tanto podemos determinar que:

$$\int \cos 5x dx = \frac{5}{5}\int \cos\ 5x dx = \frac{1}{5}\int \cos 5x\ \ 5dx = \frac{1}{5} sen 5x + c$$

2.- Encontrar la integral

$$\int \frac{dx}{sen^2 3x}$$

Podemos advertir que si intentamos hacer de manera inmediata la integración, no podemos realizarla ya que no existe en nuestras tablas de fórmulas, al menos en las conocidas como “elementales” lo que si podemos hacer antes de realizar la integración es utilizar las identidades estudiadas por la trigonometría para poder abordarla. En este caso sabemos que:

$\frac{1}{sen\alpha} = \csc\alpha$ por lo que

$$\int \frac{dx}{sen^2 3x} = \int \csc^2 3x dx$$

esta adquiere una forma que ahora si identificamos dentro de las tablas de integrales

$$\int \csc^2 v dv = -ctg v + c$$

debemos nuevamente comprobar si el diferencial existe en la integral de interés, puesto que el diferencial de *3x* es *3dx* entonces tenemos que realizar el mismo proceso del ejercicio anterior:

$$\int \frac{dx}{sen^2 3x} = \int \csc^2 3x dx = \frac{3}{3}\int \csc^2 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \csc^2 3x \;\; 3dx = \frac{1}{3}(-ctg 3x) + c$$

por lo que

$$\int \frac{dx}{sen^2 3x} = -\frac{1}{3} ctg 3x + c$$

3.- Realizar la siguiente integral $\int sen^2 x \cos x \, dx$

Analicemos dos métodos diferentes:

1er método de solución
2odo método de solución

1ero Realicemos una cambio de variable, por ejemplo definamos el cambio
u=senx por lo que su diferencial es *du=cos x dx* por lo que:

$$\int sen^2 x \cos x \, dx = \int u^2 du$$

como podemos constatar esta integral si es nos lleva a una fórmula conocida, de las cuales tenemos en las tablas de integrales, y que es la siguiente:

$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c$ por lo que podemos integrar de manera inmediata:

$$\int sen^2 x \cos x \, dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c$$

nuevamente tendremos que regresar a la variable inicial, obteniendo finalmente:

$$\int sen^2 x \cos x \, dx = \frac{sen^3}{3} + c$$

Algo que generalmente como estudiantes en algún momento nos planteamos.
¿cómo reconocer el cambio?, la pregunta es parte de toda una realidad, ya que si carecemos de práctica o la llamada experiencia, es probable que hagamos otra elección, por ejemplo: pudimos cambiar

u= $sen^2 x$

y *du= 2 sen x cos x dx*

como podemos comprobar la sustitución me genera mayores problemas y de antemano se descarta.

2odo método de solución

La segunda solución en realidad es una acción práctica en la que se tiene la experiencia y la sustitución o cambio de variable es un hecho casi mental:

Identificamos que el diferencial de *senx* es *du=cos x dx* por lo que como aparece completo el diferencial aplicaremos la fórmula:

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c$$ donde *v=senx*

finalmente tenemos:

$$\int sen^2 x \cos x \, dx = \frac{sen^3}{3} + c$$

En ocasiones de manera directa no se pueden realizar las integrales, en otras ocasiones parece ser que pudiéramos integrar de manera inmediata debido a que a primera inspección encontramos similitud con las formulas que tenemos en las tablas de formulas. Inclusive existen algunas de las mismas formulas que podemos deducir mediante algunas técnicas, como la que en esta ocasión nos ocupa, veamos el siguiente ejemplo:

Deduce la siguiente formula:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 + a^2}\right) + c$$

Pensemos en una sustitución que podamos realizar en la integral de tal forma que nos permita una integración inmediata. Recordemos que:

$$1 + tg^2 z = \sec^2 z$$

observemos que sucede si hacemos un cambio de variable que nos conduzca a el uso de esta sustitución, concretamente, sustituyamos

$$v = a \; tgz$$
$$dv = a \; d\,tgz = a \sec^2 z \;\; dz$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 z\ dz}{\sqrt{(a\,tg\,z)^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 z\ dz}{\sqrt{a^2(tg^2 z+1)}} = \int \frac{a\sec^2 z\ dz}{\sqrt{a^2}\sqrt{(tg^2 z+1)}} =$$

$$pero \quad tg^2 z + 1 = \sec^2 z$$

$$\int \frac{a\sec^2 z\ dz}{\sqrt{(a\,tg\,z)^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 z\ dz}{a\sqrt{\sec^2 z}} = \int \frac{\sec^2 z\ dz}{\sec z} = \int \sec z\ dz = \ln(\sec z + tg\,z) + c$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln(\sec z + tg\,z) + c$$

Recordemos que a $v = a\ tg\,z$ lo también queda expresado como:

$$tg\,z = \frac{v}{a} \quad y \qquad \sec z = \sqrt{1+tg^2 z}$$

de donde

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln(\sec z + tg\,z) + c = \ln\left(\sqrt{1+tg^2 z} + tg\,z\right) + c =$$

$$= \ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{v}{a}\right)^2} + \frac{v}{a}\right) + c = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+v^2}}{a} + \frac{v}{a}\right) + c =$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+v^2}+v}{a}\right) + c =$$

utilizando las propiedades de los logaritmos

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+v^2}+v}{a}\right) + c = \ln\left(\sqrt{a^2+v^2}+v\right) - \ln a + c$$

pero como lna es también una constante entonces :

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln\left(\sqrt{a^2+v^2}+v\right) + (c + \ln a) = \ln\left(\sqrt{a^2+v^2}+v\right) + c$$

donde la nueva c se ha juntado con la constante generada con el logaritmo:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln\left(\sqrt{a^2+v^2}+v\right) + c$$

al igual que esta integral se pueden encontrar de la misma forma algunas otras, vale la pena seguir la siguiente recomendación:

Sustituir	*Cuando aparece*	*Para obtener*
$v = a \; sen\, z$	$\sqrt{a^2 - v^2}$	$a \cos z$
$v = a \; tg z$	$\sqrt{a^2 + v^2}$	$a \sec z$
$v = a \; \sec z$	$\sqrt{v^2 - a^2}$	$a \; tg\, z$

hemos de aclarar que esas sustituciones surgen al igual que la sustitución del ejercicio anterior, de observación y comparación de las propiedades trigonométricas:

$$sen^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$tg^2 z + 1 = \sec^2 z$$

$$1 + ctg^2 z = \csc^2 z$$

Si tenemos dos funciones *u=u(x) y v=v(x)* las cuales reconocemos que son diferenciables podemos determinar:

Del las propiedades de las diferenciales

$$d(uv) = udv + vdu$$

integrando esta igualdad tenemos:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

pero recordemos que

$$\int d(uv) = uv$$

por lo que:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

lo cual representa un importante resultado que garantiza, que siempre y cuando dos funciones sean diferenciables, podemos utilizar el artificio, conocido como integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

1. Ejemplos:

Integral la función $f(x) = e^x senx$

Solución:

No tenemos el diferencial para poder determinar de forma inmediata la integración sin embargo:

$$\int f(x)dx = \int e^x senx\ dx$$

si tomamos:

$$dv = e^x dx \qquad \Rightarrow v = e^x$$
$$u = senx \qquad \Rightarrow du = \cos xdx$$

lo cual aplicando la ecuación de la integración por partes tendremos:

$$\int e^x senx\ dx = e^x senx\ -\ \int e^x \cos x dx$$

notemos que en la igualdad se tiene una integración casi del mismo tipo, observemos que sucede si intentamos la integración:

$$\int e^x \cos x dx$$

nuevamente integrando por partes tenemos en la elección:

$$dv = e^x dx \qquad \Rightarrow v = e^x$$
$$u = \cos x \qquad \Rightarrow du = -senx\ dx$$

sustituyendo tenemos:

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \cos x\ + \int e^x senxdx$$

sustituyendo tendremos en la ecuación original tendremos:

$$\int e^x senx\ dx = e^x senx\ -\ \left(e^x \cos x\ + \int e^x senxdx\right) =$$
$$= e^x\left(senx - \cos x\right) - \int e^x senxdx$$

despejando $\int e^x senxdx$ del segundo término tendremos:

$$2\int e^x senxdx = e^x\left(senx - \cos x\right)$$

despejando finalmente tendremos:

$$\int e^x senxdx = \frac{1}{2} e^x\left(senx - \cos x\right)$$

2. Otro ejemplo, realizar la siguiente integración:

$$\int \sec^3 x dx$$

podemos observar que directamente no podemos realizar la integración, sin embargo si podemos observar:

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x\ \sec^2 x\ dx$$

haciendo

$$dv = \sec^2 x dx \qquad \Rightarrow v = tgx$$
$$u = \sec x \qquad \Rightarrow du = \sec x\, tgx \; dx$$

que considerando en la expresión anterior tendremos:

$$\int \sec v\, dv = \ln \left|\sec v + tgv\right| + c$$
$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx = \sec x \, tgx - \int tgx \sec x \, tgx \, dx =$$
$$= \sec x \, tgx - \int \left(\sec x \quad tg^2 x\right) dx =$$
$$= \sec x \, tgx - \int \left(\sec x \quad (\sec^2 x - 1)\right) dx =$$
$$= \sec x \, tgx - \int \sec^3 x \, dx + \ln\left|\sec x + tgx\right|$$

podemos observar que en el segundo término de la segunda ecuación tenemos nuevamente
$\int \sec^3 x dx$

despejemos esta integral al primer término de la igualdad. Tendremos:

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \, tgx - \int \sec^3 x \, dx + \ln\left|\sec x + tgx\right| \quad \Rightarrow \int \sec^3 x dx + \int \sec^3 x dx = \sec x \, tgx + \ln\left|\sec x + tgx\right|$$

Por lo tanto

$$\int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \, tgx + \ln\left|\sec x + tgx\right|}{2}$$

es importante aclarar que una vez desarrollada la integral o antes podemos agregar la constante de integración recordando que esa constante es producto de las integrales anteriores, que surgieron en el proceso y que son producto de sumas y productos de todas las operaciones, pero que cobra el papel finalmente de no ser cantidades numéricas.

Es común, que en ocasiones encontremos la integración de una fracción de polinomios en el que el grado del denominador es mayor que el del numerador, lo cual no es un resultado que pueda obtenerse de manera inmediata. En el caso contrario, basta con hacer la división entre polinomios que no necesariamente es fácil pero que conduce a generar una función racional entera. La integración de este tipo de expresiones diferencial a menudo requiere obtener fracciones racionales mas simples para su integración. El teorema fundamental del álgebra es esencial en el desarrollo de métodos que tiendan a solucionar este tipo de problemas.

Una expresión del teorema fundamental del álgebra es la siguiente:

Teorema fundamental del álgebra. Cualquier polinomio con coeficientes reales de grado n tiene n raíces, las cuales son reales o complejas. En el caso de existir raíces reales siempre existen en pares, es decir, la raíz y su complejo conjugado.

Sea construido un teorema que recoge los elementos del teorema fundamental del álgebra, este agrupa en las aplicaciones a la solución de integrales:

Teorema:
La integral de toda función racional en la que el denominador se puede descomponer en factores reales de primero y segundo grado puede solucionarse una vez que la función racional se expresa en sumas y restas de funciones elementales.

Fracciones parciales

1er caso. Todos los factores del denominador son de primer grado.Si no se repiten los factores la descomposición en fracciones parciales es de la forma:

$$\frac{A}{x-a_1}+\frac{B}{x-a_2}+\frac{C}{x-a_3}+\cdots+\frac{I}{x-a_I}+\cdots$$

Ejemplos resueltos

en el caso que uno de los factores se repita n veces tendremos que desarrollar para ese caso una descomposición de la siguiente forma:

$$\frac{A}{(x-a_1)^n}+\frac{B}{(x-a_1)^{n-1}}+\frac{C}{(x-a_1)^{n-2}}+\cdots+\frac{I}{(x-a_1)}$$

Ejercicios resueltos

Segundo caso. El denominador tiene factores de segundo grado.

De acuerdo al teorema fundamental del álgebra, si los factores son de la forma x^2+px+q y además no se repiten, a todo factor corresponderá una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

Ejercicios resueltos

Un caso particular es el análogo al caso lineal en el que llega a aparecer una raíz mas de una vez, en este caso pensar que un polinomio de segundo grado puede repetirse n veces, a lo cual corresponderá la suma de n fracciones parciales de la forma:

$$\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\cdots+\frac{Lx+M}{\left(x^2+px+q\right)}$$