1 DESIGUALDADES O INECUACIONES

1.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Una igualdad en Álgebra es aquella relación que establece equivalencia entre dos entes matemáticos. Es una afirmación, a través del signo **=** , de que dos expresiones son iguales.

Las igualdades algebraicas pueden ser:

a) **Ecuaciones**: cuando se cumple la igualdad solamente para determinado(s) valor(es) de la(s) variable(s).

Ejemplo: $3x - 7 = 5$, se cumple que es igual solamente cuando $x = 4$.

b) **Fórmulas**: cuando se cumple la igualdad para todos los valores de la(s) variable(s) independiente(s).

Ejemplo: $d = vt$, se cumple para todos los valores de la velocidad v y del tiempo t.

c) **Identidades**: Cuando el miembro izquierdo es exactamente igual al derecho. También se les llama así a las igualdades que se cumplen independientemente del valor de sus variables.

Ejemplos: a) $8 + sen\ 2x = 8 + sen\ 2x$ (Ambos lados son idénticos).

b) $sen^2 x + cos^2\ x = 1$ (para cualquier valor que se le dé a la x siempre la suma da 1).

d) **Equivalencias**: cuando el miembro izquierdo vale lo mismo que el derecho.

Ejemplo: $5x = 3x + 2x$

Aunque hay que señalar que no todos los autores ni matemáticos están de acuerdo en esta terminología y a veces la utilizan de manera distinta. Lo que sí es un hecho es que solamente hay cuatro clases de igualdades.

En síntesis:

$$\text{igualdades}\begin{cases}\text{ecuaciones}\\ \text{fórmulas}\\ \text{identidades}\\ \text{equivalencias}\end{cases}$$

Cuando dos expresiones matemáticas se comparan solamente existen dos posibilidades:

a) que sean iguales entre sí;
b) que no sean iguales entre sí, o sea, que sean diferentes.

Una desigualdad es entonces la consecuencia de una comparación que no resulta igual. Si a y b son las cosas comparadas que no resultaron iguales, se escribe $a \neq b$. A su vez, cuando dos expresiones comparadas son desiguales, solamente existen dos opciones: que la primera de ellas sea mayor que la segunda, o que sea menor.

La simbología correspondiente es $a > b$, o bien $a < b$.

En síntesis, al comparar dos objetos matemáticos a y b, solamente existen las siguientes posibilidades:

$$\text{Al comparar } a \text{ con } b\begin{cases}a = b\\ a \neq b\begin{cases}a < b\\ a > b\end{cases}\end{cases}$$

De manera semejante a las igualdades, las desigualdades pueden ser:

a) **Absolutas**: cuando la desigualdad no depende de las variables.

Ejemplos:

$$7 > 5$$
$$a + 1 > a$$
$$(a + b)^2 > 0$$

b) **Condicionales o inecuaciones**: cuando se cumple la desigualdad solamente para ciertos valores de la(s) variable(s).

Ejemplos:

$$3x < x^2 - 5$$
$$3x + 2y < 0$$
$$\frac{13x - 2}{x + 6} > \frac{1}{2}$$

Resumiendo:

$$\text{desigualdades}\begin{cases}\text{absolutas}\\ \text{condicionales o inecuaciones}\end{cases}$$

Si resolver una ecuación es encontrar el (los) valor(es) de la(s) variable(s) con los que la relación de igualdad adquiere veracidad, de manera semejante resolver una desigualdad es encontrar el (los) valor(es) de la(s) variable(s) con los que la relación de desigualdad adquiere veracidad. Evidentemente debe tratarse de una desigualdad condicional o inecuación.

Entre la resolución de ecuaciones y de desigualdades se presentan algunas diferencias, como el hecho de que las soluciones de las ecuaciones son valores determinados de la(s) variable(s), mientras que las soluciones de las desigualdades son intervalos de valores. Algunas otras diferencias aparecerán conforme se adentre en el estudio de las desigualdades.

1.2 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Las principales propiedades de las desigualdades son:

1) *Si a ambos miembros de una desigualdad se le suma o resta la misma cantidad, la desigualdad se conserva.*

Ejemplo:
$$\begin{aligned} 7 &< 15 \\ 7 + 3 &< 15 + 3 \quad \text{, o sea que} \\ 10 &< 18 \end{aligned}$$

2) *Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por la misma cantidad positiva, la desigualdad se conserva.*

Ejemplo:
$$\begin{aligned} 7 &< 15 \\ 7 \times 3 &< 15 \times 3 \quad \text{, o sea que} \\ 21 &< 45 \end{aligned}$$

3) *Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por la misma cantidad negativa, la desigualdad se invierte.*

Ejemplo:
$$\begin{aligned} 7 &< 15 \\ 7(-3) &< 15(-3) \quad \text{, o sea que} \\ -21 &> -45 \Rightarrow \text{(se invirtió el signo).} \end{aligned}$$

Esta tercera propiedad es la responsable de que las desigualdades, cuando tienen variable en el denominador, se resuelvan de manera diferente a las ecuaciones que tienen también a la variable en el denominador. Y no solamente eso, sino que cuando se despeja la incógnita teniendo coeficiente negativo, como realmente se multiplica en ambos lados por una cantidad negativa (no “pasa” al otro lado dividiendo), el signo de la desigualdad se invierte. Los ejemplos que se resolverán más adelante aclararán esto último afirmado.

1.3 CLASIFICACIÓN DE LAS DESIGUALDADES

Una clasificación puede hacerse de diferentes maneras, dependiendo del criterio clasificador que se emplee. Para las desigualdades, los criterios clasificadores que se toman en cuenta son: la ubicación de la variable, el número de variables, el grado y la existencia o no de valor absoluto.

1) Por la ubicación de la variable:

$$\text{desigualdades}\begin{cases} \text{sin variable en el denominador} \begin{cases} \text{de } 1^{er} \text{ grado} \\ \text{de } 2^{o} \text{ grado} \end{cases} \\ \text{con variable en el denominador} \begin{cases} \text{de } 1^{er} \text{ grado} \\ \text{de } 2^{o} \text{ grado} \end{cases} \end{cases}$$

Pueden existir de 3º, 4º y mayor grado, pero en este curso solamente se analizarán hasta las de segundo grado.

Ejemplos de desigualdades sin variable en el denominador son los siguientes:

a) $4x - 1 < 7x + 9$

b) $\dfrac{6x-1}{2} > \dfrac{x+11}{5}$ En este ejemplo existen denominadores, pero allí no está ubicada la variable. El problema no es que haya denominadores, sino que allí esté la variable.

Ejemplos de desigualdades con variable en el denominador son los siguientes:

a) $\dfrac{4}{x^2 - 1} > x + 7$

b) $\dfrac{3x+16}{2-9x} < \dfrac{2}{x-8}$

2) Por el número de variables:

$$\text{desigualdades} \begin{cases} \text{con una variable} \\ \text{con dos variables} \end{cases}$$

Igualmente, pueden existir de 3, 4 o más variables, pero en este curso solamente se analizarán las de una variable.

Ejemplos de desigualdades con una sola variable son los siguientes:

a) $x^2 + x + 7 > 8x - 1$

b) $\dfrac{8-x}{2x^2+1} > 0$

Ejemplos de desigualdades con dos variables son los siguientes:

a) $5x - 3y > 9$

b) $x^2 + 3xy < 2 - y^2$

3) Respecto del valor absoluto:

$$\text{desigualdades}\begin{cases}\text{sin valor absoluto}\\ \text{con valor absoluto}\end{cases}$$

Ejemplos de desigualdades sin valor absoluto son los siguientes:

a) $\dfrac{6x - y}{2} > x + 1$

b) $9x^2 + 3x + 1 > 0$

Ejemplos de desigualdades con valor absoluto son los siguientes:

a) $|4x - 1| < x^2 - 1$

b) $\left|5x - 1 > |11x + 12|\right|$

c) $\left|\dfrac{7x - 8}{3}\right| > 2 + |x|$

1.4 DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO SIN VARIABLE EN EL DENOMINADOR

Se resuelven exactamente igual que las ecuaciones de primer grado, es decir solamente hay que despejar. Pero debe tenerse mucho cuidado de respetar la propiedad 3 de las desigualdades antes citada, para lo cual es necesario recordar que es falso que en una ecuación (en este caso, en una desigualdad) lo que está sumando "pasa" restando al otro lado, o que lo que está multiplicando "pasa" dividiendo, sino que en ambos lados se resta la misma cantidad (ley uniforme o de las igualdades) para anular la que se desea, o que ambos lados se dividen por la misma cantidad igualmente para anular la cantidad deseada.

Ejemplo 1: $3x - 7 < 8 - 2x$

Solución: Para anular el término -7 del lado izquierdo, se suma $+7$ en ambos lados:

$$3x - 7 + 7 < 8 - 2x + 7$$

$$3x < 15 - 2x$$

Para anular el término $-2x$ del lado derecho, se suma $+2x$ en ambos lados:

$$3x + 2x < 15 - 2x + 2x$$

$$5x < 15$$

Para eliminar el coeficiente 5 del término $5x$, se dividen ambos miembros entre 5. Como se trata de una cantidad positiva, el signo no cambia:

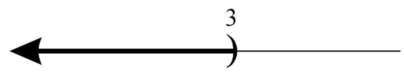
$$\frac{5x}{5} < \frac{15}{5}$$

$$\boxed{x < 3}$$

La solución puede escribirse de las siguiente formas:

$x < 3$ o bien

$(-\infty, 3)$ o también gráficamente



Un paréntesis de esta forma significa que
el extremo no está incluido en el intervalo.

Ejemplo 2: $8x - 70 < 14 + 20x$

Solución: Para anular el término -70 del lado izquierdo, se suma $+70$ en ambos lados:

$$8x - 70 + 70 < 14 + 20x + 70$$

$$8x < 84 + 20x$$

Para anular el término $20x$ del lado derecho, se resta $20x$ en ambos lados:

$$8x - 20x < 84 + 20x - 20x$$

$$-12x < 84$$

Para eliminar el coeficiente -12 del término $-12x$, se multiplican ambos miembros por $-\frac{1}{12}$, o lo que es lo mismo se dividen ambos miembros entre - 12. Como se está multiplicando por una cantidad negativa, el signo de la desigualdad se invierte :

$$\frac{-12x}{-12} > \frac{84}{-12}$$

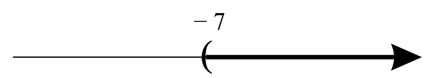
$$\frac{\cancel{-12}x}{\cancel{-12}} > \frac{84}{-12}$$

$$\boxed{x > -7}$$

La solución puede escribirse de las siguiente formas:

$x > -7$ o bien

$(-7, \infty)$ o también gráficamente



Un paréntesis de esta forma significa que el extremo no está incluido en el intervalo.

Ejemplo 3: $\dfrac{5x+2}{-6} < \dfrac{1-7x}{5}$

Solución: Esta desigualdad, aunque tiene denominadores, es sin variable en el denominador porque no aparecen x en ninguno de los dos. Para resolverla exitosamente es indispensable olvidarse de que el denominador -6 *pasa* al otro lado multiplicando, lo mismo que el denominador 5. Quien lo resuelva bajo esa forma de "razonar" no llegará al resultado correcto, pues estará pasando por alto la propiedad 3 de las desigualdades.

Lo primero que debe hacerse es quitar los denominadores. Para eliminar el denominador -6 deben multiplicarse por -6 ambos lados de la desigualdad y como es una cantidad negativa SE INVIERTE EL SIGNO. Para eliminar el denominador 5 deben multiplicarse por 5 ambos lados de la desigualdad y como es una cantidad positiva no hace cambiar el signo de la desigualdad. Como resultado final habrá una inversión de signo.

$$(-6)(5)\frac{5x+2}{-6} > (-6)(5)\frac{1-7x}{5}$$

$$\cancel{(-6)}(5)\left[\frac{5x+2}{\cancel{-6}}\right] > (-6)\cancel{(5)}\left[\frac{1-7x}{\cancel{5}}\right]$$

$$(5)[5x+2] > (-6)[1-7x]$$

$$25x+10 > -6+42x$$

Para escribir los términos con x debe restarse -42 en ambos lados de la desigualdad; y para escribir los números sin x debe restarse 10 en ambos lados:

$$25x + \cancel{10} - 42x \cancel{-10} > -6 \cancel{+42x} \cancel{-42x} - 10$$
$$25x - 42x > -6 - 10$$
$$-17x > -16$$

Para despejar la x deben dividirse ambos miembros de la desigualdad entre -17, lo cual, como se trata de una cantidad negativa, hace cambiar el signo de la desigualdad:

$$\frac{-17x}{-17} < \frac{-16}{-17}$$

$$\frac{\cancel{-17}x}{\cancel{-17}} < \frac{-16}{-17}$$

Finalmente, como en el lado derecho de la desigualdad se tiene una división de menos entre menos que da positivo, el resultado es

$$\boxed{x < \frac{16}{17}}$$

EJERCICIO 1

Resolver las siguientes desigualdades:

1) $8x - 46 < 9x + 21$

2) $15x + 23 > 13x + 22$

3) $12x + 1 < 15x + 2$

4) $28 - 29x > x + 41$

5) $9 - 17x < 33 - 11x$

6) $55 + 2x < 17x - 29$

7) $48 - x > 9x - 23$

8) $12x - 7 < 60x - 11$

9) $10x > 7(2x + 5)$

10) $8(21 - 3x) > 5(x - 11)$

11) $2(3x - 25) > 9(11x + 3)$

12) $4(-3x - 7) < 9(-x - 2)$

13) $\dfrac{5x - 1}{7} < 9 - 11x$

14) $\dfrac{5 - 10x}{17} < 9 + 6x$

15) $\dfrac{5 + 12x}{-11} > \dfrac{9 + 7x}{4}$

16) $\dfrac{12x}{5} + \dfrac{8}{15} > \dfrac{13 - x}{-10}$

17) $\dfrac{7x}{12} + \dfrac{13}{18} > \dfrac{11x}{6} - \dfrac{8}{15}$

18) $\dfrac{21x}{8} + \dfrac{13}{12} < \dfrac{17x}{16} - \dfrac{1}{4}$

19) $\dfrac{2x + 11}{-5} > \dfrac{x}{3}$

20) $\dfrac{8 - 3x}{-7} < 5$

1.5 DESIGUALDADES DE 2º GRADO SIN VARIABLE EN EL DENOMINADOR

Los métodos que se explicarán a continuación pueden extenderse a desigualdades de grado superior a dos.

1.5.1 MÉTODO GRÁFICO

Para poder aplicar con éxito este método en la resolución de desigualdades de segundo grado sin variable en el denominador es indispensable tener presente cómo es la gráfica de una ecuación polinomial de segundo grado, es decir de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

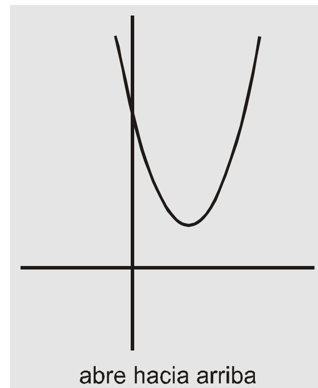


figura 1.1

Toda ecuación de segundo grado tiene como gráfica una parábola, la cual abre hacia arriba (ver figura 1.1) si el coeficiente $\boldsymbol{a}$ es positivo, por ejemplo $y = 5x^2 - 3x - 2$ (en este caso, $a = +5$), y abre hacia abajo si dicho coeficiente es negativo, por ejemplo $y = -3x^2 + x - 9$. Ver figura 1.2.

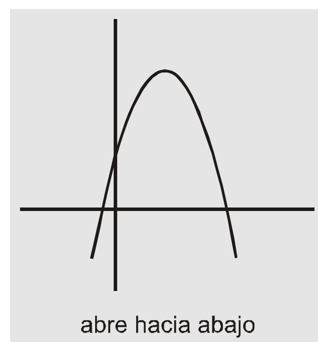


figura 1.2

Por otra parte, las intersecciones de la parábola con el eje de las x suceden en los puntos que tienen en sus coordenadas una ordenada y = 0. Por lo tanto, se pueden obtener resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ya que si la ecuación de toda la parábola es $y = ax^2 + bx + c$ y se está diciendo que $y = 0$ cuando cruza el eje de las x, entonces en esa intersección la ecuación vale $0 = ax^2 + bx + c$.

El procedimiento para resolver desigualdades de segundo grado sin variable en el denominador por el método gráfico se explica a continuación en dos columnas: en la columna izquierda se mencionan los pasos, en la columna de la derecha se muestra un ejemplo que va correspondiendo a los pasos señalados en la columna izquierda.

PASOS

1) Se ordena la desigualdad a la forma

$$ax^2 + bx + c \neq 0$$

Nota: El símbolo $\neq$ implica < o > que.

2) Al trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ se le pone nombre, es decir, se renombra como y. Entonces $y = ax^2 + bx + c$ y se grafica. Para graficar debe considerarse solamente

a) Si la parábola abre hacia arriba o abre hacia abajo;
b) Las intersecciones de la parábola con el eje de las x, las cuales se obtienen cuando y vale cero, es decir, haciendo

$$0 = ax^2 + bx + c\,,$$

que en forma ordenada se escribe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado se obtienen las coordenadas en donde la parábola corta al eje de las x.

3) Se deduce si $y < 0$, o bien $y > 0$, a partir de que se hizo $y = ax^2 + bx + c$ y que:

EJEMPLO

$$5x^2 < 26 - 3x$$

Ordenando:

$$5x^2 + 3x - 26 < 0$$

Sea $y = 5x^2 + 3x - 26$

Graficando: Se trata de una parábola que abre hacia arriba en virtud de que el coeficiente del término cuadrático es positivo: $a = +5$.

Las intersecciones de la parábola con el eje de las x se obtienen haciendo $y = 0$ y resolviendo, es decir

$$5x^2 + 3x - 26 = 0$$

Resolviendo por la fórmula general:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-26)}}{2(5)}$$

de donde $x_1 = 2$

$$x_2 = -\frac{13}{5}$$

de manera que un esbozo de la gráfica es

a) Si el problema original establece que

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{y} < 0$$

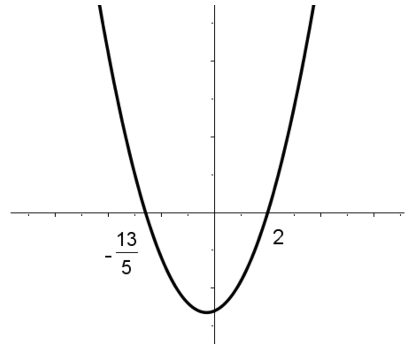
significa que $y < 0$;

b) Si el problema original establece que

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{y} > 0$$

significa que $y > 0$

Hecha la deducción, se localiza(n) en la gráfica el (los) intervalos(s) para la variable x para los que se cumple la condición de que $y < 0$, o bien que $y > 0$. Esos valores de x son la solución de la desigualdad.

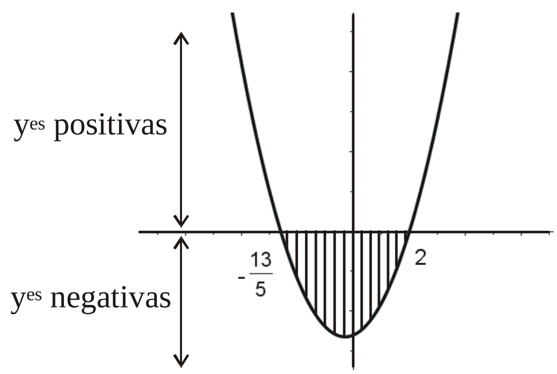


Como

$$\underbrace{5x^2 + 3x - 26}_{y} < 0$$

se deduce que y < 0.

Se buscan entonces en la gráfica los valores de la variable ***y*** negativos, los cuales se señalan de alguna manera visible:



El intervalo solución es, entonces, el correspondiente a todas las equis que están entre $x = -\dfrac{13}{5}$ y $x = 2$, lo cual puede escribirse de cualquiera de las siguientes formas:

$$-\frac{13}{5} < x < 2$$

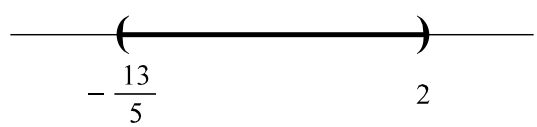
o bien

$$\left(-\frac{13}{5}, 2\right)$$

o también

$$x > -\frac{13}{5} \cap x < 2$$

o en forma gráfica



Ejemplo 2: Resolver la desigualdad $3x^2 - 7 > 20x$

Solución: Ordenando: $3x^2 - 20x - 7 > 0$

Sea $y = 3x^2 - 20x - 7$

que implica que $y > 0$, porque $\underbrace{3x^2 - 20x - 7}_{y} > 0$

Graficando: Se trata de una parábola que abre hacia arriba en virtud de que el coeficiente del término cuadrático es positivo: $a = +3$.

Las intersecciones de la parábola con el eje de las x se obtienen cuando $y = 0$

$$\underbrace{3x^2 - 20x - 7}_{y} = 0$$

es decir, cuando $3x^2 - 20x - 7 = 0$

Resolviendo por la fórmula general:

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(3)(-7)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 84}}{6}$$

de donde

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

de manera que un esbozo de la gráfica es la figura 1.3:

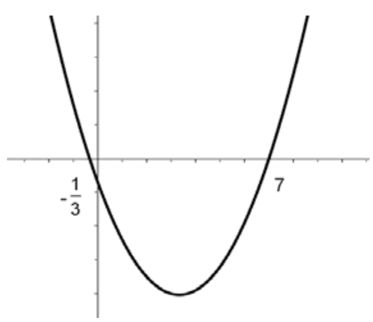


figura 1.3

Como

$$\underbrace{3x^2 - 20x - 7}_{y} > 0$$

se deduce que $y > 0$. Se buscan entonces en la gráfica los valores de la variable y positivos, los cuales se señalan de alguna manera visible (ver figura 1.4):

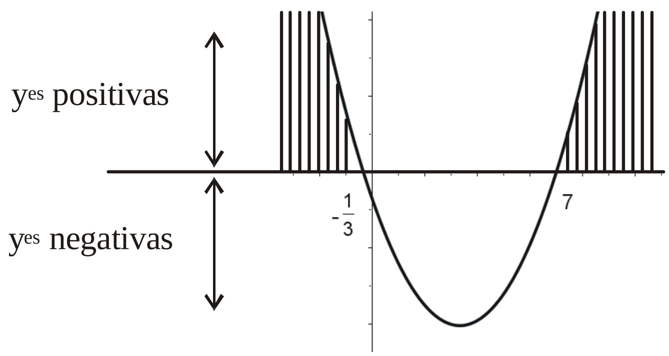


figura 1.4

Los intervalos solución son, entonces, los correspondientes a todas las equis menores que $-\frac{1}{3}$ y también las mayores que 7, lo cual puede escribirse de cualquiera de las siguientes formas:

$$x < -\frac{1}{3}$$
$$x > 7$$

también como

$$x < -\frac{1}{3} \cup x > 7$$

o bien

$$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(7, \infty\right)$$

o en forma gráfica

Ejemplo 3: Resolver la desigualdad $4x^2 - 7x + 9 > 0$

Solución: Ya está ordenada. Sea $y = 4x^2 - 7x + 9$. Entonces como $\underbrace{4x^2 - 7x + 9}_{y} > 0$, implica que $y > 0$. Al final, en la gráfica se buscarán las $y > 0$.

Graficando: Se trata de una parábola que abre hacia arriba en virtud de que el coeficiente del término cuadrático es positivo.

Las intersecciones de la parábola con el eje de las $\boldsymbol{x}$ se obtienen cuando $y = 0$

$$\underbrace{4x^2 - 7x + 9}_{y} = 0$$

Es decir cuando

$$4x^2 - 7x + 9 = 0$$

y resolviendo por la fórmula general:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 144}}{8}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{-95}}{8}$$

Como la raíz cuadrada es negativa significa que no existe ninguna x que satisfaga la ecuación y como al igualar a cero se buscan las intersecciones de la parábola con el eje de las $\boldsymbol{x}$, quiere decir que no hay intersecciones, es decir, que la parábola no corta al eje de las $\boldsymbol{x}$. Entonces la parábola está situada totalmente arriba del eje de las $\boldsymbol{x}$. De manera que un esbozo de la gráfica es algo semejante a la figura 1.5 de la derecha.

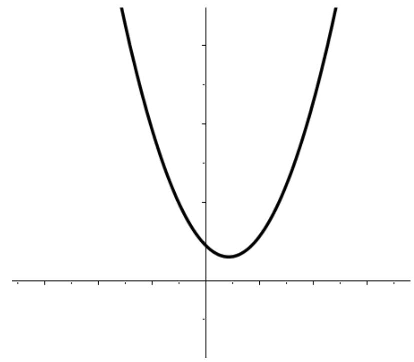


figura 1.5

Sabiendo que $\underbrace{4x^2 - 7x + 9}_{y} > 0$

se deduce que $y > 0$. Se buscan entonces en la gráfica los valores de la variable y positivos, los cuales se señalan de alguna manera visible, como en la figura 1.6:

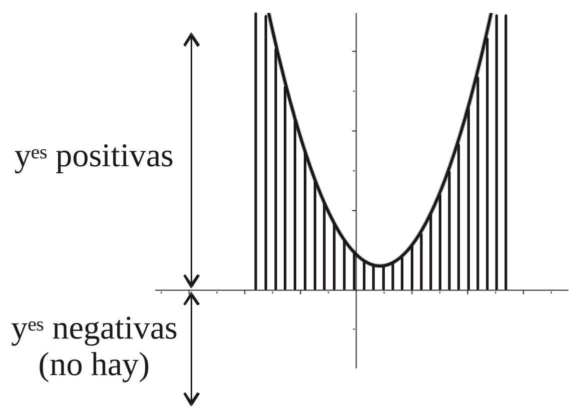


figura 1.6

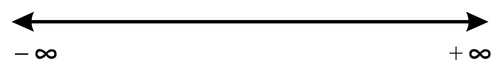
La solución son todas las x, lo cual puede escribirse cualquiera de las siguientes formas:

$$-\infty < x < \infty$$

o bien

$$(-\infty , \infty)$$

o en forma gráfica



o inclusive diciéndolo simplemente con palabras textuales: *La solución son todas las x.*

Ejemplo 4: Resolver la desigualdad $4x^2 - 4x + 1 < 0$

Solución: Ya está ordenada. Sea $y = 4x^2 - 4x + 1$, entonces como $\underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{y} < 0$, se deduce que $y < 0$.

Graficando: Se trata de una parábola que abre hacia arriba en virtud de que el coeficiente del término cuadrático es positivo.

Las intersecciones de la parábola con el eje las $\boldsymbol{x}$ se obtienen cuando $y = 0$

$$\underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{y} = 0$$

es decir

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Resolviendo por la fórmula general:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8}$$

de donde

$$x_1 = \frac{4+0}{8} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2}$$

Cuando la raíz cuadrada es cero, las dos soluciones resultan iguales. Esto significa que el vértice de la parábola está situado exactamente sobre el eje de las $\boldsymbol{x}$, en este caso en $x = \frac{1}{2}$. De manera que un esbozo de la gráfica es la figura 1.7:

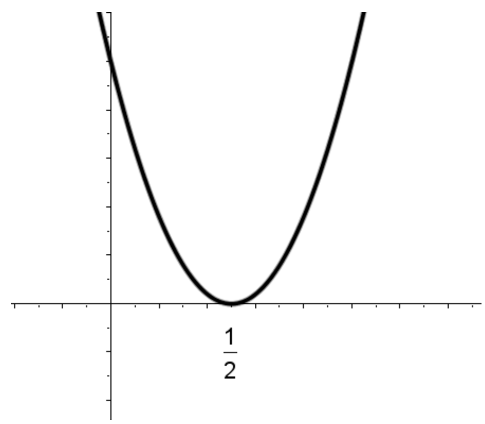


figura 1.7

Sabiendo que

$$\underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{y} < 0$$

se deduce que $y < 0$. En la gráfica anterior se puede ver que no existe ninguna y negativa, por lo que no existe ninguna equis que sea solución.

EJERCICIO 2

Resolver las siguientes desigualdades de 2º grado por el método gráfico:

1)	$6x^2 + 5x + 1 > 0$	2)	$x^2 - x - 12 < 0$
3)	$5x^2 - 14x - 3 > 0$	4)	$x^2 - 10x + 16 < 0$
5)	$4x^2 - 25 > 0$	6)	$x^2 - 100 < 0$
7)	$9x^2 + 2x + 7 < 0$	8)	$x^2 - x + 11 > 0$
9)	$2x^2 + 3x + 17 > 0$	10)	$5x^2 - 4x + 3 < 0$
11)	$9x^2 - 6x + 1 < 0$	12)	$4x^2 - 12x + 9 > 0$
13)	$25x^2 + 20x + 4 > 0$	14)	$9x^2 - 42x + 49 < 0$

1.5.2 MÉTODO DE INTERVALOS

PASOS

1) Se ordena la desigualdad en la forma

$$ax^2 + bx + c \neq 0$$

Nota: El símbolo $\neq$ implica < o > que.

2) Se hace $ax^2 + bx + c = 0$ y se resuelve la ecuación.

Las raíces de esta ecuación definen los extremos del intervalo o los intervalos solución.

3) Se ubican en la recta numérica las raíces obtenidas en el paso anterior.

EJEMPLO

$$5x^2 < 26 - 3x$$

Ordenando:

$$5x^2 + 3x - 26 < 0$$

Sea $5x^2 + 3x - 26 = 0$

Resolviendo por la fórmula general:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-26)}}{2(5)}$$

4) Se selecciona un punto arbitrario de la recta numérica, a condición de que no sea una de las raíces encontradas en el paso 2 y se prueba en la desigualdad original.

   Si el valor seleccionado satisface la desigualdad, el intervalo al que pertenece es intervalo solución; si no satisface, el intervalo no es solución.

   A partir de allí se toman alternadamente los intervalos como *sí-no-sí* solución o bien *no-sí-no* solución.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+520}}{10}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{10}$$

de donde

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -\frac{13}{5}$$

Se ubican en la recta numérica estos valores:

Se selecciona arbitrariamente un valor para x a condición que no sea ninguno de los dos anteriores. Sea $x = 0$ el valor seleccionado. Sustituyendo en la desigualdad original:

$$5x^2 < 26 - 3x$$

$$5(0)^2 < 26 - 3(0)$$

$$0 < 26 \qquad \text{cierto}$$

Significa que el intervalo al que pertenece $x = 0$ es intervalo solución. Por lo tanto, la solución es

$$-\frac{13}{5} < x < 2$$

Ejemplo 5: Resolver la desigualdad $3x^2 - 7 > 20x$

Solución: Ordenando: $3x^2 - 20x - 7 > 0$

Igualando a cero y resolviendo para localizar los extremos de los intervalos solución:

$$3x^2 - 20x - 7 = 0$$

Resolviendo por la fórmula general:

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(3)(-7)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 84}}{6}$$

$$x = \frac{20 \pm 22}{6}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 7 \\ x_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}}$$

Localizando en la recta numérica estos puntos:

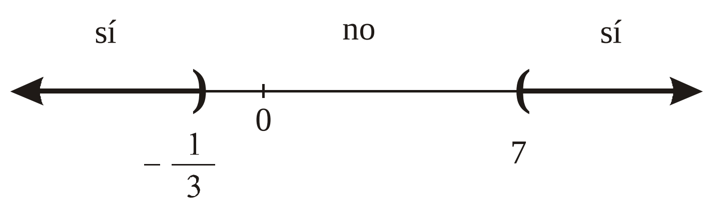
Seleccionando un punto arbitrario de la recta numérica, a condición que no sea una de las raíces encontradas, y probando en la desigualdad original, por ejemplo, con $x = 0$:

$$3x^2 - 20x - 7 > 0$$

$$3(0)^2 - 20(0) - 7 > 0$$

$$-7 > 0 \qquad \text{✗ } \textbf{falso}$$

Significa que todo el intervalo al que pertenece $x = 0$ no es solución. Tomando alternadamente los intervalos como *sí-no-sí* solución se llega a



Es decir, la solución es

$$x < -\frac{1}{3} \cup x > 7$$

EJERCICIO 3

Resolver las siguientes desigualdades de 2º grado por el método de intervalos:

1)	$6x^2 + 5x + 1 > 0$	2)	$x^2 - x - 12 < 0$
3)	$5x^2 - 14x - 3 > 0$	4)	$x^2 - 10x + 16 < 0$
5)	$4x^2 - 25 > 0$	6)	$x^2 - 100 < 0$
7)	$9x^2 + 2x + 7 < 0$	8)	$x^2 - x + 11 > 0$
9)	$2x^2 + 3x + 17 > 0$	10)	$5x^2 - 4x + 3 < 0$
11)	$9x^2 - 6x + 1 < 0$	12)	$4x^2 - 12x + 9 > 0$
13)	$25x^2 + 20x + 4 > 0$	14)	$9x^2 - 42x + 49 < 0$
15)	$x^2 - 25 < 0$	16)	$x^2 - 25 > 0$
17)	$9x^2 - 25 > 0$	18)	$25x^2 - 36 < 0$
19)	$49x^2 + 25 < 0$	20)	$81x^2 + 1 > 0$

1.6 DESIGUALDADES CON VARIABLE EN EL DENOMINADOR

Para entender bien el porqué de las diferentes técnicas que existen para resolver desigualdades cuando aparece la variable en el denominador, debe el estudiante tener muy claro que en los procesos de despejar incógnitas no *se pasa* a sumar, ni a restar ni a multiplicar al otro lado ninguna cantidad.

Hay que recordar que existe la equivocada creencia, porque lamentablemente así lo enseñan muchos profesores, que una cantidad que está sumando *pasa* al otro lado del signo igual restando; o si está restando *pasa* sumando; o si está multiplicando *pasa* dividiendo; o si está dividiendo *pasa* multiplicando. Todo eso es falso, no tiene ninguna razón de ser, no hay lógica en eso. Son mecanismos que agilizan los procesos de despejar, pero que llevan a errores a los inexpertos en Matemáticas.

Es indispensable recordar que si se tiene una igualdad, por ejemplo,

$$2x - 7 = 1$$

para despejar la incógnita x , NO se *pasa* el $- 7$ al otro lado sumando, pues no existe lógica para suponer que el número $- 7$ *pasa* al lado derecho con la operación contraria. Los números no son mariposas o golondrinas para suponer que *se pasan* de un lado a otro como si anduvieran volando. Lo que realmente se hace es aplicar la ley de las igualdades (ley uniforme) que dice que *lo que se haga de un lado de la igualdad debe hacerse del otro lado también para que la igualdad se conserve.* ¿Qué se necesita para que el $- 7$ se elimine?: fácil, sencillamente sumarle $+ 7$; entonces a la igualdad se le suma en ambos lados ese $+ 7$ que se necesita, quedando así:

$$2x - 7 \mathbf{+ 7} = 1 \mathbf{+ 7}$$

Si se hacen las operaciones únicamente en el lado izquierdo de la igualdad (en el lado derecho no), se eliminan el **- 7** con el **+ 7**, quedando entonces

$$2x = 1 + 7$$

y allí es donde da la impresión de que el **- 7** original *pasó* al otro lado con signo contrario; pero es solamente una apariencia, no una realidad. Analizando el lado derecho, a simple vista se ve que lo anterior es lo mismo que $2x = 8$ (sumando 1 + 7) . Posteriormente, para despejar la incógnita x es necesario quitarle su coeficiente 2 que le multiplica, lo cual se consigue dividiendo entre 2 ; pero nuevamente por la ley de las igualdades, debe hacerse en ambos lados, quedando así:

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

Si se efectúan de nuevo las operaciones únicamente en el lado izquierdo de la igualdad (en el lado derecho no), se simplifican el **2** del numerador con el **2** del denominador, quedando entonces

$$x = \frac{8}{2}$$

y otra vez da la impresión de que ese **2** *pasó* al otro lado dividiendo. Pero no pasa de ser una apariencia.

Esto y la tercera propiedad de las desigualdades son las responsables de que las desigualdades, cuando aparece la variable en el denominador, requieran de un análisis especial para su solución.

Para facilitar la comprensión del tema, la explicación comenzará a partir de la suposición que exista solamente un denominador. Por ejemplo,

$$\frac{7x-1}{x+5} < 1$$

El primer paso consiste en eliminar el denominador $x+5$, lo cual, por lo afirmado líneas arriba, se consigue multiplicando ambos miembros de la desigualdad por dicho denominador.

$$(x+5)\left(\frac{7x-1}{x+5}\right) < (x+5)(1)$$

Hasta allí parece todo "normal", pero el detalle está en que al multiplicar toda la desigualdad por $x+5$ se debe saber si se trata de una cantidad positiva o de una negativa para, de acuerdo con la propiedad 3, invertir o no el signo de la desigualdad. Y no se sabe si es positivo o negativo el factor $(x+5)$. porque puede ser positivo si la x toma ciertos valores, pero también puede ser negativo si toma otros valores. Por ejemplo, si $x = 2$ el factor $(x+5)$ es positivo ya que toma el valor de 7; pero si $x = -11$ el factor $(x+5)$ es negativo ya que toma el valor de -6. Por lo tanto, no se puede multiplicar la desigualdad por $(x+5)$ en ambos lados.

Existen varias técnicas para resolver desigualdades con variables en el denominador que eliminan el problema de quitar denominadores sin saber si son positivos o negativos.

1.6.1 DESIGUALDADES DEL TIPO: *UNA FRACCIÓN COMPARADA CON CERO*

Son de la forma $\dfrac{p(x)}{q(x)} \neq 0$, en donde

$p(x)$ representa al numerador de la fracción. En general será un polinomio.
$q(x)$ representa al denominador de la fracción. En general será un polinomio.

La expresión *diferente de cero* ($\neq$ 0) significa necesariamente “mayor que” o bien “menor que”, dado que al comparar un ente matemático con cero solamente existen dos posibilidades: o son iguales o son desiguales. Si se está afirmando que no son iguales, necesariamente son desiguales. Ahora bien, al ser desiguales, a su vez existen solamente dos posibilidades: o la primera es mayor que la segunda o la primera es menor que la segunda.

Afirmar, pues, que $\dfrac{p(x)}{q(x)} \neq 0$ implica una de las dos siguientes opciones:

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \;; \qquad \text{o bien} \qquad \frac{p(x)}{q(x)} < 0$$

A su vez, si la fracción es mayor que cero (positiva), implica que el numerador y el denominador tienen el mismo signo; si es menor que cero implica que el numerador y el denominador tienen diferente signo. En síntesis:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \neq 0 \begin{cases} \dfrac{p(x)}{q(x)} > 0 \begin{cases} \text{implica } \dfrac{+}{+} \\[2ex] \text{o bien } \dfrac{-}{-} \end{cases} \\[6ex] \dfrac{p(x)}{q(x)} < 0 \begin{cases} \text{implica } \dfrac{+}{-} \\[2ex] \text{o bien } \dfrac{-}{+} \end{cases} \end{cases}$$

Soluciones parciales

Cuando se habla de una solución parcial significa que el intervalo de valores x obtenido como solución es solamente una parte de dicha solución, pero no toda. Por ejemplo, si la solución de alguna desigualdad son todas las x mayores que 20, o sea $x > 20$, una solución parcial pueden ser las x mayores que 30, esto es $x > 30$, porque ciertamente las x mayores que 30 son parte de las x mayores que 20. Se le llama a $x > 30$ **solución parcial** porque ciertamente es una parte de la solución, pero no toda. Cuando se juntan todas las soluciones parciales obtenidas durante un proceso se obtiene la **solución total**. No olvidar que esa idea de *juntar* todas las soluciones parciales en la teoría de conjuntos se llama **unión**, representado con el símbolo $\bigcup$.

> **Una *solución total* se obtiene de la unión de todas las soluciones parciales obtenidas durante el proceso.**

CASO 1.- Si $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ significa que la fracción es positiva, lo cual, a su vez, implica que debe cumplirse una de las dos siguientes opciones: $\dfrac{+}{+}$ o bien $\dfrac{-}{-}$

Es decir, para que una fracción sea positiva se requiere que el numerador y el denominador sean positivos *al mismo tiempo*, o bien, que el numerado y el denominador sean ambos negativos *al mismo tiempo*.

Se ha hecho énfasis en señalar que **"al mismo tiempo"**, ya que debe recordarse que el significado de *al mismo tiempo* es una **intersección.** Ver figura 1.8.

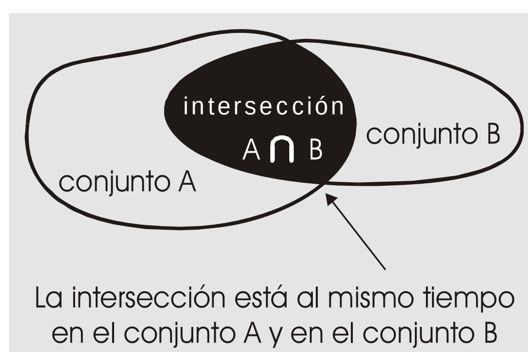


figura 1.8

El procedimiento para resolver una desigualdad de este tipo consiste en resolver primero el numerador haciéndolo mayor que cero (positivo), luego el denominador haciéndolo también mayor que cero (positivo) y luego, como son cosas que deben darse *al mismo tiempo*, hacer la intersección de ambas para obtener una primera solución parcial.

A continuación, considerando la segunda opción (menos entre menos), se debe resolver primero el numerador haciéndolo menor que cero (negativo), luego el denominador haciéndolo también menor que cero (negativo) y después, como son cosas que deben darse *al mismo tiempo*, hacer la intersección de ambas para obtener una segunda solución parcial.

Finalmente, para llegar a la solución total o definitiva, se hace la unión de las dos soluciones parciales.

Ejemplo 1: Resolver la desigualdad $\dfrac{5x+1}{3x+5} > 0$

Solución: Como la fracción es mayor que cero, significa que es positiva. Dicha fracción es positiva solamente si se cumple una cualquiera de estas dos condiciones:

a) $\dfrac{+}{+}$, porque la división de más entre más da más, esto es, da positivo que es lo mismo que mayor que cero que es lo que pide la desigualdad original.

b) $\dfrac{-}{-}$, porque la división de menos entre menos da más, esto es, da negativo que es lo mismo que menor que cero que es lo que pide la desigualdad original.

Entonces se deben considerar las dos opciones al momento de resolver la desigualdad. Haciéndolo se obtiene que:

Opción I: $\dfrac{+}{+}$: (mas entre mas), significa que el numerador y el denominador son positivos, o sea mayores que cero.

Haciendo el numerador mayor que cero:

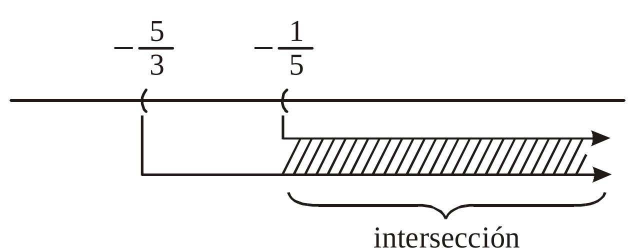
$$5x+1>0$$
$$5x+1-1>0-1$$
$$5x>-1$$
$$\frac{5x}{5}>\frac{-1}{5}$$
$$\boxed{x>-\frac{1}{5}}$$

Haciendo el denominador mayor que cero:

$$3x+5>0$$
$$3x+5-5>0-5$$
$$3x>-5$$
$$\frac{3x}{3}>-\frac{5}{3}$$
$$\boxed{x>-\frac{5}{3}}$$

Como ambas condiciones deben cumplirse *al mismo tiempo*, se trata de una intersección.

La intersección tiene el equivalente a formularse la pregunta: ¿Cuáles x son mayores que menos un quinto al mismo tiempo que sean mayores que menos cinco tercios? La siguiente gráfica muestra con claridad lo anterior.



La primera solución parcial son todas las x mayores que menos un quinto: $x>-\frac{1}{5}$

Opción II: $\frac{-}{-}$ (menos entre menos), significa que como el numerador y el denominador son negativos, ambos son menores que cero.

Haciendo el numerador menor que cero:

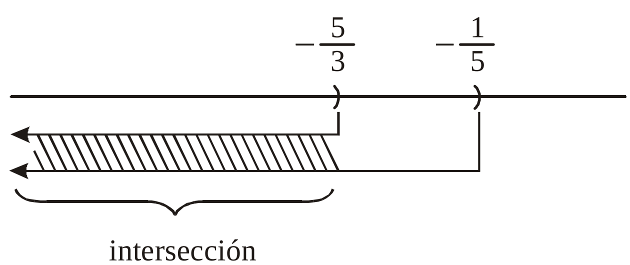
$$5x + 1 < 0$$
$$5x + 1 - 1 < 0 - 1$$
$$5x < -1$$
$$\frac{5x}{5} < \frac{-1}{5}$$
$$\boxed{x < -\frac{1}{5}}$$

Haciendo el denominador menor que cero:

$$3x + 5 < 0$$
$$3x + 5 - 5 < 0 - 5$$
$$3x < -5$$
$$\frac{3x}{3} < \frac{-5}{3}$$
$$\boxed{x < -\frac{5}{3}}$$

Como ambas condiciones deben cumplirse al mismo tiempo,
se trata de una intersección.

La intersección tiene el equivalente a formularse la pregunta: ¿Cuáles x son menores que menos un quinto al mismo tiempo que sean menores que menos cinco tercios? La siguiente gráfica muestra con claridad lo anterior.



La segunda solución parcial son todas las x menores que menos cinco tercios: $x < -\dfrac{5}{3}$.

Por lo tanto, la solución total es la unión de las dos soluciones parciales, o sea son todas las x mayores que menos un quinto y además todas las x menores que menos cinco tercios, lo cual se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas:

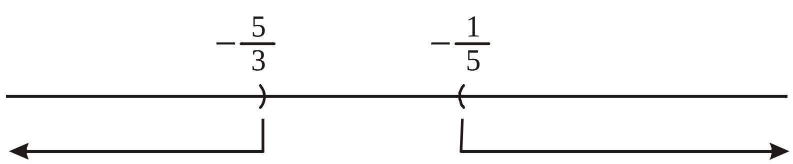
$$x > -\frac{1}{5} \cup x < -\frac{5}{3}$$

o bien escrito en dos renglones significa unión:

$$\left.\begin{array}{l} x > -\dfrac{1}{5} \\ x < -\dfrac{5}{3} \end{array}\right\}$$

Equivale a afirmar que son todas las equis mayores que menos un quinto y además (o también) todas las equis menores que menos cinco tercios.

y gráficamente:



CASO 2.- Si $\dfrac{p(x)}{q(x)} < 0$ significa que la fracción es negativa, lo cual, a su vez, implica que debe cumplirse una de las dos siguientes opciones: $\dfrac{+}{-}$ o bien $\dfrac{-}{+}$.

El procedimiento para resolver una desigualdad de este tipo consiste en resolver primero el numerador haciéndolo mayor que cero (positivo), luego el denominador haciéndolo menor que cero (negativo) y después, como son cosas que deben darse *al mismo tiempo*, hacer la intersección de ambas para obtener una primera solución parcial.

Luego, considerando la segunda opción, se debe resolver primero el numerador haciéndolo menor que cero (negativo), luego el denominador haciéndolo mayor menor que cero (positivo) y luego, como son cosas que deben darse *al mismo tiempo*, hacer la intersección de ambas para obtener una segunda solución parcial.

Finalmente, para llegar a la solución definitiva, se hace la unión de las dos soluciones parciales.

Ejemplo 2: Resolver $\dfrac{5x+2}{6x-13} < 0$

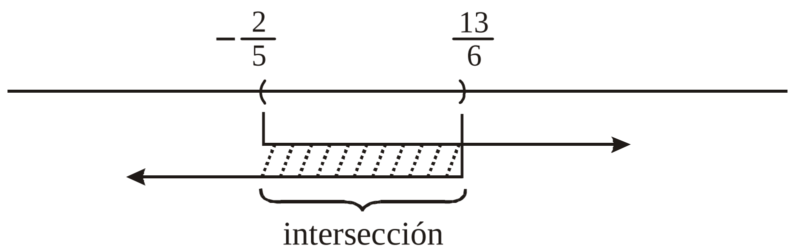
Solución: Como la fracción es negativa por ser menor que cero, hay dos posibilidades: Una, que sea $\dfrac{+}{-}$; la otra que sea $\dfrac{-}{+}$. Hay que analizar opción por opción.

Opción I: $\dfrac{+}{-}$: Significa que el numerador es mayor que cero (positivo) mientras que el denominador es menor que cero (negativo).

Haciendo el numerador mayor que cero:	Haciendo el denominador menor que cero:
$5x + 2 > 0$	$6x - 13 < 0$
$5x + 2 - 2 > 0 - 2$	$6x - 13 + 13 < 0 + 13$
$5x > -2$	$6x < 13$
$\dfrac{5x}{5} > \dfrac{-2}{5}$	$\dfrac{6x}{6} < \dfrac{13}{6}$
$\boxed{x > -\dfrac{2}{5}}$	$\boxed{x < \dfrac{13}{6}}$

Como ambas condiciones deben cumplirse *al mismo tiempo*, se trata de una intersección.

La intersección tiene el equivalente a formularse la pregunta: ¿Cuáles x son mayores que menos dos quintos *al mismo tiempo* que sean menores que trece sextos? La siguiente gráfica muestra con mayor claridad lo anterior.



La primera solución parcial son las x que están entre menos dos quintos y trece sextos, lo cual se escribe de alguna de las siguientes formas:

$$x > -\frac{2}{5} \cap x < \frac{13}{6}$$

aunque la más usual es la siguiente:

$$-\frac{2}{5} < x < \frac{13}{6}$$

En esta última notación debe tomarse en cuenta que:

a) La x siempre debe ir en medio;
b) el número menor siempre se escribe a la izquierda (conforme a la recta numérica);
c) el número mayor siempre se escribe a la derecha (conforme a la recta numérica);
d) los signos de desigualdad siempre son $<$, nunca $>$.

Obsérvese que si se lee de la x hacia la izquierda, lo que se está afirmando es que son las equis mayores que menos dos quintos $\left(x > -\frac{2}{5}\right)$; en cambio, si se lee de la x hacia la derecha, lo que se está afirmando es que son las equis menores que trece sextos.

Opción II: $\frac{-}{+}$: Significa que el numerador es menor que cero (negativo) mientras que el denominador es mayor que cero (positivo).

Haciendo el numerador menor que cero:

$$5x + 2 < 0$$

$$5x + 2 - 2 < 0 - 2$$

$$5x < -2$$

$$\frac{5x}{5} < \frac{-2}{5}$$

$$\boxed{x < -\frac{2}{5}}$$

Haciendo el denominador mayor que cero:

$$6x - 13 > 0$$

$$6x - 13 + 13 > 0 + 13$$

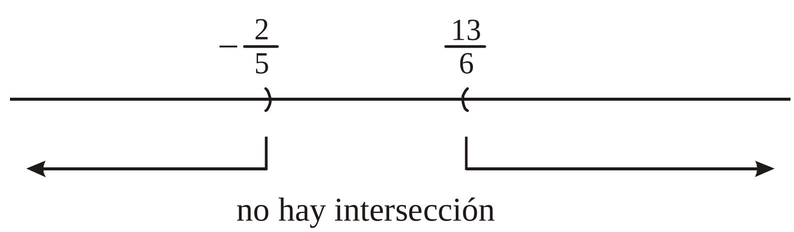
$$6x > 13$$

$$\frac{6x}{6} > \frac{13}{6}$$

$$\boxed{x > \frac{13}{6}}$$

Como ambas condiciones deben cumplirse al mismo tiempo, se trata de una intersección.

La intersección tiene el equivalente a formularse la pregunta: ¿Cuáles x son menores que menos dos quintos al mismo tiempo que sean mayores que trece sextos? La siguiente gráfica muestra con mayor claridad lo anterior.



Significa que no hay una segunda solución parcial. Lo anterior es debido a que nunca con ningún valor que se le quiera dar a la x, la fracción original va a ser negativa en su numerador al mismo tiempo que positiva en su denominador.

Por lo tanto, la solución total es la unión de las dos soluciones parciales, pero como solamente existe una solución parcial (la primera), ella es toda la solución total, lo cual se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas:

$$x > -\frac{2}{5} \cap x < \frac{13}{6}$$

Aunque la más usual es la siguiente:

$$\boxed{-\frac{2}{5} < x < \frac{13}{6}}$$

CASOS APARENTEMENTE DIFERENTES

A veces se presentan desigualdades aparentemente diferentes a la forma que se está estudiando (una fracción comparada con cero), apareciendo como una fracción comparada con otra fracción o comparada con un entero. Por ejemplo:

$$\frac{x-3}{3} < \frac{7x+1}{x+3}$$

Lo único que debe hacerse en desigualdades como las del ejemplo anterior es escribir todo del lado izquierdo (por lo tanto, cero del lado derecho), sacar común denominador y efectuar la suma o resta de fracciones para convertirla en una sola fracción. De esta manera ya queda como una fracción comparada con cero.

Ejemplo 3: $\frac{5x}{x+3} > 2$

Solución: Escribiendo todo del lado izquierdo resulta:

$$\frac{5x}{x+3} - 2 > 0$$

Sacando común denominador y efectuando la suma:

$$\frac{5x-2(x+3)}{x+3}>0$$

$$\frac{5x-2x-6}{x+3}>0$$

$$\frac{3x-6}{x+3}>0$$

En este momento ya se tiene una fracción comparada con cero y se resuelve conforme se vio al principio de este tema. Como la fracción es mayor que cero, o sea positiva, se tienen dos posibilidades:

a) $\frac{+}{+}$, porque la división de más entre más da más.

b) $\frac{-}{-}$, porque la división de menos entre menos da más.

Opción I: $\frac{+}{+}$: Significa que el numerador y el denominador son positivos, o sea mayores que cero.

Haciendo el numerador mayor que cero:

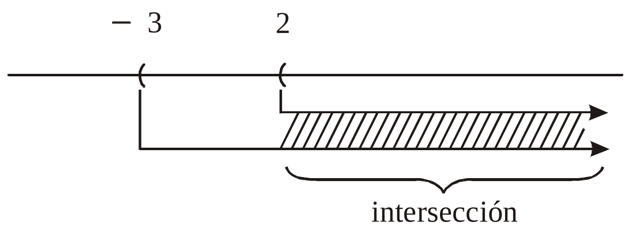
$$3x-6>0$$
$$3x-6+6>0+6$$
$$3x>6$$
$$\frac{3x}{3}>\frac{6}{3}$$
$$\boxed{x>2}$$

Haciendo el denominador mayor que cero:

$$x+3>0$$
$$x+3-3>0-3$$
$$\boxed{x>-3}$$

Como ambas condiciones deben cumplirse *al mismo tiempo*, se trata de una intersección.

La intersección tiene el equivalente a formularse la pregunta: ¿Cuáles x son mayores que dos al mismo tiempo que sean mayores que menos tres? La siguiente gráfica muestra con claridad lo anterior.



La primera solución parcial son todas las x mayores que dos: $x > 2$

Opción II: $\dfrac{-}{-}$ (menos entre menos), significa que como el numerador y el denominador son negativos, ambos son menores que cero.

Haciendo el numerador menor que cero:

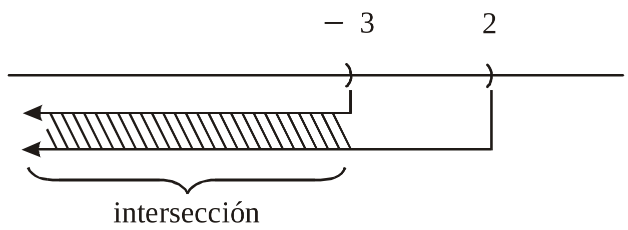
$$3x - 6 < 0$$
$$3x - 6 + 6 < 0 + 6$$
$$3x < 0$$
$$\frac{3x}{3} < \frac{6}{3}$$
$$\boxed{x < 2}$$

Haciendo el denominador menor que cero:

$$x + 3 < 0$$
$$x + 3 - 3 < 0 - 3$$
$$\boxed{x < -3}$$

Como ambas condiciones deben cumplirse *al mismo tiempo*, se trata de una intersección.

La intersección tiene el equivalente a formularse la pregunta: ¿Cuáles x son menores que dos al mismo tiempo que sean menores que menos tres? La siguiente gráfica muestra con claridad lo anterior.



La segunda solución parcial son todas las x menores que menos tres: $x < -3$.

Por lo tanto, la solución total es la unión de las dos soluciones parciales, o sea son todas las x mayores que dos y además todas las x menores que menos tres, lo cual se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas:

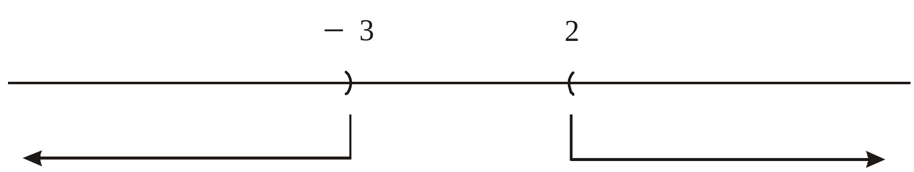
$$x < -3 \cup x > 2$$

o bien escrito en dos renglones significa unión:

$$\left.\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 2 \end{array}\right\}$$

Equivale a afirmar que son todas las equis menores que menos tres y además (o también) todas las equis mayores que dos.

y gráficamente:



1.6.2 MÉTODO DE LOS INTERVALOS

Para cualquier desigualdad con variable en el denominador se puede utilizar el método de los intervalos, que consiste en dividir la recta numérica en intervalos en la que los valores que la dividen son los siguientes:

a) Los valores que se obtienen de resolver la desigualdad como si fuera ecuación, o sea, cambiando el signo < o > por el signo =;
b) Los valores que hacen cero el o los denominadores.

A continuación se toma un valor arbitrario para la x a condición de que no sea ninguno de los obtenidos en los incisos anteriores y se prueba en la desigualdad. Si se obtiene algo cierto, el intervalo al que pertenece el valor seleccionado para la x es intervalo *sí solución*; si se obtiene algo falso, el intervalo al que pertenece el valor seleccionado para la x es intervalo *no solución*. Finalmente se alternan los intervalos en *sí-no-sí-no- ... solución*, o bien en *no-sí-no-sí- ... solución*.

Ejemplo 1: $\frac{3x+1}{x+3} < 1$

Solución:

a) Resolviendo la desigualdad como si fuera ecuación:

$$\frac{3x+1}{x+3} = 1$$

$$3x+1 = 1(x+3)$$

$$2x = 2$$

$$\boxed{x_1 = 1}$$

b) Obteniendo los valores que hacen cero el denominador:

$$x+3 = 0$$

$$\boxed{x_2 = -3}$$

Con estos dos valores se parte la recta numérica en intervalos como se muestra en la siguiente gráfica:

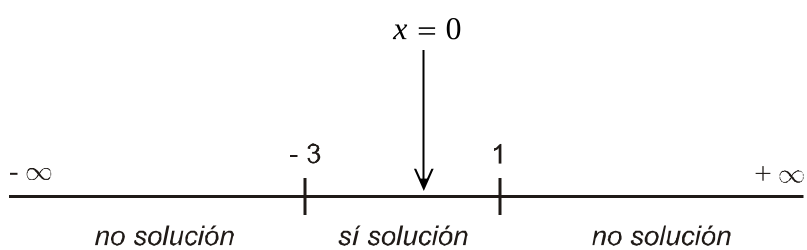
Tomando un valor arbitrario para la x, por ejemplo, $x = 0$, y sustituyéndolo en la desigualdad original se obtiene que

$$\frac{3x+1}{x+3} < 1$$

$$\frac{3(0)+1}{0+1} < 1$$

$$\frac{1}{3} < 1 \qquad ✔ \text{ cierto}$$

Por lo tanto, el intervalo al que pertenece $x = 0$ es *sí solución*. Al hacer la alternancia de los intervalos a partir de lo obtenido, se tiene la solución gráfica como



la cual es

$$\boxed{-3 < x < 1}$$

Ejemplo 2: $\dfrac{x+5}{3x-1} > \dfrac{4x-1}{x+3}$

Solución:

a) Resolviendo la desigualdad como si fuera ecuación:

$$\frac{x+5}{3x-1}=\frac{4x-1}{x+3}$$

$$(x+5)(x+3)=(4x-1)(3x-1)$$

$$x^2+8x+15=12x^2-7x+1$$

$$x^2-12x^2+8x+7x+15-1=0$$

$$-11x^2+15x+14=0$$

de donde

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-\dfrac{7}{11}\end{array}}$$

b) Obteniendo los valores que hacen cero los denominadores:

$$3x-1=0$$

$$3x=1$$

$$\boxed{x_3=\frac{1}{3}}$$

$$x+3=0$$

$$\boxed{x_4=-3}$$

Con estos cuatro valores se parte la recta numérica en intervalos como se muestra en la siguiente gráfica:

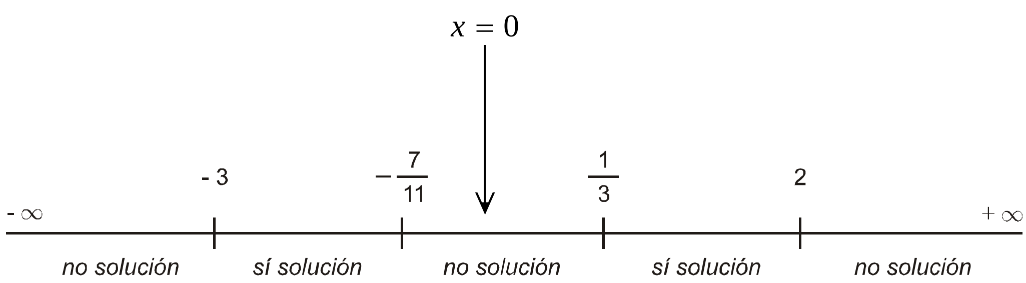
Probando con cualquier valor para x que esté adentro de cualquiera de los cinco intervalos, por ejemplo con $x=0$:

$$\frac{x+5}{3x-1}>\frac{4x-1}{x+3}$$

$$\frac{0+5}{3(0)-1}>\frac{4(0)-1}{0+3}$$

$$\frac{5}{-1} > \frac{-1}{3} \qquad ✗ \text{ falso}$$

Por lo tanto, el intervalo al que pertenece $x = 0$ es *no solución*. Al hacer la alternancia de los intervalos a partir de lo obtenido, se tiene la solución gráfica como



que corresponde a la solución

$$\boxed{-3 < x < -\frac{7}{11} \ \cup \ \frac{1}{3} < x < 2}$$

Nota importante: En estos dos últimos ejemplos se probó con $x = 0$ porque éste es el valor para la x que resulta más sencillo, pero no significa que siempre deba probarse con cero.

EJERCICIO 4

Resolver las siguientes desigualdades:

1) $\dfrac{7x-4}{x+1} < 0$

2) $\dfrac{11x+12}{3x-17} > 0$

3) $\dfrac{5x}{x-12} < 0$

4) $\dfrac{9x+13}{11x-33} < 0$

5) $\dfrac{x-7}{x+3} > 0$

6) $\dfrac{2x-14}{3x+18} < 0$

7) $\dfrac{11x-3}{2x+1} > \dfrac{19}{5}$

8) $\dfrac{7x+1}{x+1} < 4$

9) $\dfrac{15-4x}{x+5} < 3$

10) $\dfrac{x+14}{2-x} > 1$

11) $\dfrac{2x+5}{5-4x} > 2$

12) $\dfrac{5}{1-x} < \dfrac{5}{x+21}$

13) $\dfrac{7}{2-2x} > \dfrac{-3}{x}$

14) $\dfrac{26}{13-2x} < \dfrac{2}{5x+1}$

15) $\dfrac{2x+9}{x+2} > 2x-3$

16) $\dfrac{x+24}{8-3x} < x+5$

17) $\dfrac{2x+3}{3-7x} < \dfrac{4}{5x+4}$

18) $\dfrac{7x+2}{1-9x} > \dfrac{x-12}{5x-6}$

19) $\dfrac{2x-8}{x+2} > \dfrac{x-9}{11-x}$

20) $\dfrac{x+17}{3-x} < \dfrac{4}{x+11}$

1.7 DESIGUALDADES DE INTERSECCIÓN

Una desigualdad de la forma $a < x < b$ significa todos los valores que puede tomar la variable x que estén entre a y b, es decir, en el intervalo (a, b).

También significa la intersección de las desigualdades $x > a \cap x < b$, es decir, todas las x que al mismo tiempo sean mayores que a y menores que b. Hay que recordar que la intersección tienen el significado de *al mismo tiempo*, o a la inversa, todo lo que es *al mismo tiempo* es una intersección.

Por lo tanto, la manera más sencilla de resolver este tipo de desigualdades, aunque no la única forma, es resolver por separado cada una de las dos desigualdades que la integran y luego intersecar ambas soluciones. Dicha intersección es la solución buscada.

Ejemplo 1: $1 < 2x - 3 < 11$

Solución: Esto significa que la operación $2x - 3$ debe estar entre los valores de 1 y 11. Para encontrar los valores que puede tomar x para que se cumpla lo anterior, se separa en las dos desigualdades originales que la componen y se resuelven por separado cada una de ellas, es decir:

$$\begin{array}{l||l}
1 < 2x - 3 & 2x - 3 < 11 \\
2x > 1 + 3 & 2x < 11 + 3 \\
2x > 4 & 2x < 7 \\
\boxed{x > 2} & \boxed{x < 7}
\end{array}$$

Como ambas condiciones deben cumplirse *al mismo tiempo*, se trata de una intersección.

Entonces la intersección de ambas soluciones es la solución de la desigualdad original, es decir

$$x > 2 \cap x < 7$$

que corresponde a

$$\boxed{2 < x < 7}$$

Cuando no se intuye a primera vista el intervalo que corresponde a dicha intersección, una representación gráfica resulta muy útil, como la mostrada en la figura 1.9.

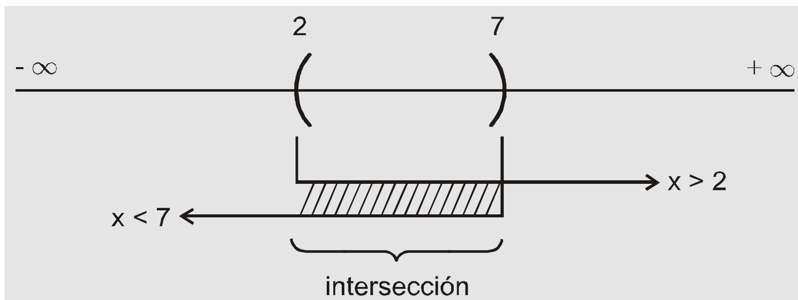


figura 1.9

Otro método: El método más conocido es el de sumar o restar, o multiplicar o dividir toda la desigualdad por la misma cantidad hasta dejar despejada la x en el centro de la desigualdad. Solamente que no en todas las desigualdades de este tipo resulta fácil hacerlo, por lo que es recomendable conocer el método anterior.

Así, en el ejemplo anterior:

$$1 < 2x - 3 < 11$$

Primero se suma $+3$ en toda la desigualdad para eliminar el -3 que acompaña a 2*x*:

$$\begin{aligned} 1 + 3 &< 2x - 3 + 3 < 11 + 3 \\ 4 &< 2x < 14 \end{aligned}$$

Ahora dividiendo todo entre 2 para despejar la x, tomando en cuenta que por ser una cantidad positiva no se invierte el signo, se obtiene que

$$\frac{4}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{14}{2}$$

$$\boxed{2 < x < 7}$$

Que es el mismo resultado obtenido por el método de las intersecciones.

Esta solución significa que cualquier x menor que 2 pertenece al intervalo *no solución*; todas las x que estén entre 2 y 7 pertenecen al intervalo *sí solución*; y todas las x mayores que 7 están en el intervalo *no solución*.

Efectivamente, probando con $x = 1$ que pertenece al intervalo *no solución*, sustituyendo este valor en la desigualdad original se obtiene

$$1 < 2x - 3 < 11$$
$$1 < 2(1) - 3 < 11$$
$$1 < -1 < 11$$

✗ Es falso porque esta expresión significa que el -1 está entre 1 y 11 y no es así.

Ahora probando con $x = 4$ que pertenece al intervalo *sí solución*, sustituyendo este valor en la desigualdad original se obtiene

$$1 < 2x - 3 < 11$$
$$1 < 2(4) - 3 < 11$$
$$1 < 5 < 11$$

✔ Es cierto porque esta expresión significa que el 5 está entre 1 y 11.

Ahora probando con $x = 8$ que pertenece al intervalo *no solución*, sustituyendo este valor en la desigualdad original se obtiene

$$1 < 2x - 3 < 11$$
$$1 < 2(8) - 3 < 11$$
$$1 < 13 < 11$$

✗ Es falso porque lo anterior significa que el 13 está entre 1 y 11 y no es así.

Ejemplo 2: 13 < 4 - 9*x* < 76

Solución: Esto significa que la operación $4-9x$ debe estar entre los valores de 13 y 76. Para encontrar los valores que puede tomar x para que se cumpla lo anterior, se separa en las dos desigualdades originales que la componen y se resuelven por separado cada una de ellas, es decir:

$$13 < 4 - 9x$$
$$13 - 4 < -9x$$
$$9 < -9x$$
$$\frac{9}{-9} > \frac{-9x}{-9}$$
$$\boxed{x < -1}$$

Nótese que el signo de la desigualdad se invirtió cuando se dividió toda ella entre -9.

$$4 - 9x < 76$$
$$-9x < 76 - 4$$
$$-9x < 72$$
$$\frac{-9x}{-9} > \frac{72}{-9}$$
$$\boxed{x > -8}$$

Nótese que el signo de la desigualdad se invirtió cuando se dividió toda ella entre -9.

Como ambas condiciones deben cumplirse *al mismo tiempo*, se trata de una intersección.

Entonces la intersección de ambas soluciones es la solución de la desigualdad original, es decir

$$x < -1 \cap x > -8$$

que corresponde a

$$\boxed{-8 < x < -1}$$

Cuando no se intuye a primera vista el intervalo que corresponde a dicha intersección, una representación gráfica resulta muy útil, como la mostrada en la figura 1.10.

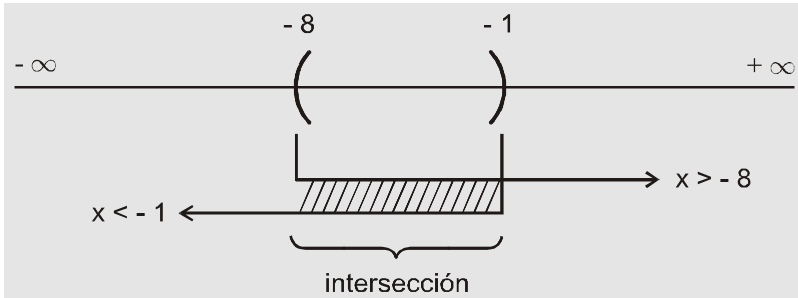


figura 1.10

Otro método: El método más conocido, como se dijo en el ejemplo anterior, es el de sumar o restar, o multiplicar o dividir toda la desigualdad por la misma cantidad hasta dejar despejada la x en el centro de la desigualdad.

Así, en el ejemplo anterior:

$$13 < 4 - 9x < 76$$

Primero se resta -4 en toda la desigualdad para eliminar el 4 que acompaña al término central $4 - 9x$:

$$13 - 4 < 4 - 4 - 9x < 76 - 4$$
$$9 < -9x < 72$$

Ahora dividiendo todo entre -9 para despejar la x; tomando en cuenta que por ser una cantidad negativa se invierte el signo, se obtiene que

$$\frac{9}{-9} > \frac{-9x}{-9} > \frac{72}{-9}$$
$$-1 > x > -8$$

Y como en esta simbología debe escribirse siempre de menor a mayor leído de izquierda a derecha para coincidir con la recta numérica, entonces invirtiendo:

$$\boxed{-8 < x < -1}$$

Que es el mismo resultado obtenido por el método de las intersecciones.

Ejemplo 3: $-3 < 5x + 1 < x$

Solución: Esto significa que la operación $5x + 1$ debe estar entre -3 y el valor que tenga la misma x. Para encontrar los valores que puede tomar x para que se cumpla lo anterior, se separa en las dos desigualdades originales que la componen y se resuelven por separado cada una de ellas, es decir:

$-3 < 5x + 1\,1$	$5x + 1 < x$
$-4 < 5x$	$4x < -1$
$5x > -4$	
$\boxed{x > -\frac{4}{5}}$	$\boxed{x < -\frac{1}{4}}$

Como ambas condiciones deben cumplirse *al mismo tiempo*, se trata de una intersección.

Entonces la intersección de ambas soluciones es la solución de la desigualdad original, es decir son todas las x mayores que $-\frac{4}{5}$ que al mismo tiempo sean menores que $-\frac{1}{4}$. Si mentalmente no puede el estudiante obtener esos valores, con una gráfica es muy simple:

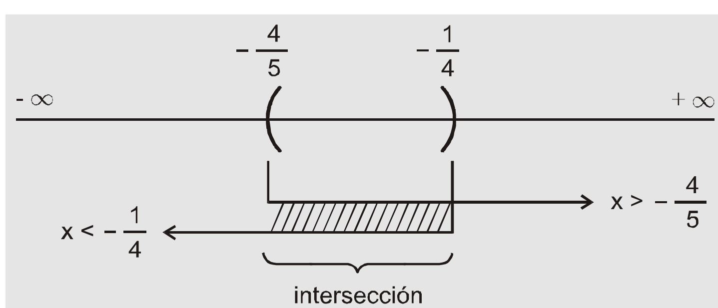


figura 1.11

La solución es

$$\boxed{-\frac{4}{5} < x < -\frac{1}{4}}$$

Otro método: El segundo método visto en los ejemplos anteriores si se aplica a este ejemplo podría complicársele al estudiante su comprensión, al menos, quizá, más que el primer método. En este caso habría que hacer lo siguiente:

$$-3 < 5x + 1 < x$$

Primer paso: Restar x en toda la desigualdad para que desaparezca del extremo derecho:

$$-3 - x < 5x + 1 - x < x - x$$

$$-3 - x < 4x + 1 < 0$$

Segundo paso: Restar 1 en toda la desigualdad para que la expresión central $4x + 1$ quede solamente con el término x:

$$-3 - x - 1 < 4x + 1 - 1 < 0 - 1$$

$$-4 - x < 4x < -1$$

Tercer paso: Se divide toda la desigualdad entre 4 para despejar la x central. Como se divide entre una cantidad positiva no se invierten los signos de la desigualdad:

$$\frac{-4 - x}{4} < \frac{4x}{4} < -\frac{1}{4}$$

$$\frac{-4 - x}{4} < x < -\frac{1}{4}$$

Hasta aquí ya se sabe que la x tiene que ser menor que menos un cuarto (leído del centro hacia la derecha), pero no se sabe aún lo del otro extremo (extremo izquierdo). Entonces debe resolverse esa desigualdad:

$$\frac{-4-x}{4} < x$$
$$-4 - x < 4x$$
$$-x - 4x < 4$$
$$-5x < 4$$
$$x > -\frac{4}{5}$$

Tiene que hacerse entonces la intersección de $x < -\frac{1}{4}$ con $x > -\frac{4}{5}$. Es decir, la x tiene que estar entre $-\frac{4}{5}$ y $-\frac{1}{4}$ como se había obtenido antes.

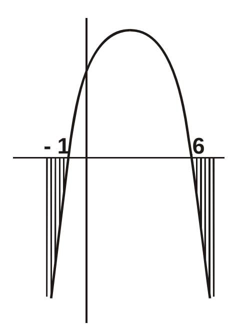
Ejemplo 4: $x < 5x + 6 < x^2$

Solución: Se separa en las dos desigualdades originales que la componen y se resuelven por separado cada una de ellas, es decir

$$x < 5x + 6$$
$$x - 5x < 6$$
$$-4x < 6$$
$$\boxed{x > -\frac{3}{2}}$$

$$5x + 6 < x^2$$
$$-x^2 + 5x + 6 < 0$$

Como es una desigualdad de 2º grado se puede resolver por el método gráfico: Las intersecciones con el eje x de la parábola se encuentran en $x_1 = 6$ y $x_2 = -1$; como $y < 0$,



$$x < -1 \cup x > 6$$

Entonces la intersección de ambas soluciones es la solución de la desigualdad original, es decir

$$x > -\frac{3}{2} \cap \left[\, x < -1 \cup x > 6 \right]$$

lo cual se muestra en la figura 1.12:

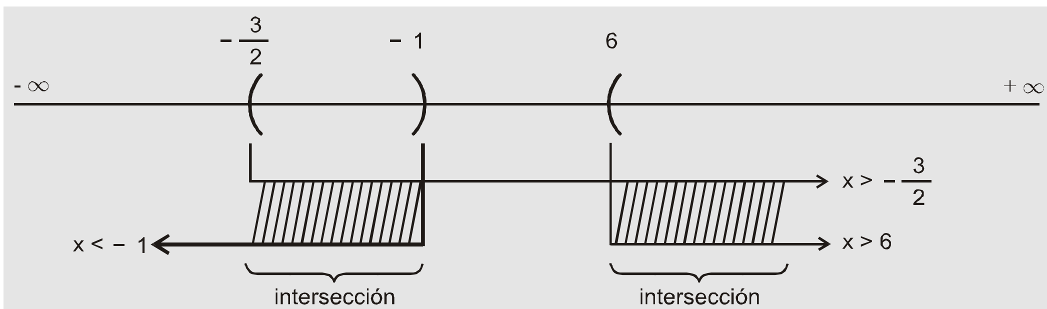


figura 1.12

que corresponde a

$$\boxed{-\frac{3}{2} < x < -1 \;\cup\; x > 6}$$

Ejemplo 5: $-1 < x^2 - 4x - 6 < 15$

Solución: Se separa en las dos desigualdades originales que la componen y se resuelven por separado cada una de ellas, es decir

$$-1 < x^2 - 4x - 6$$
$$0 < x^2 - 4x - 5$$

o bien

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$x^2 - 4x - 6 < 15$$
$$x^2 - 4x - 21 < 0$$

Haciéndola por el método de las intersecciones, al resolverla como ecuación se obtienen

Haciéndola por el método de las intersecciones, al resolverla como ecuación se obtienen

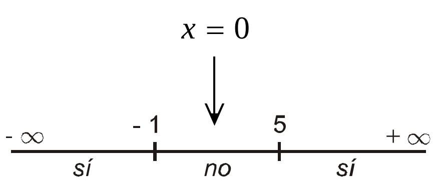
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = -1$$

Probando con $x = 0$ en la desigualdad:

$$0^2 - 4(0) - 5 > 0$$

$-5 > 0$ ✗ falso

Significa que



$$\boxed{x > -1 \ \bigcup \ x > 5}$$

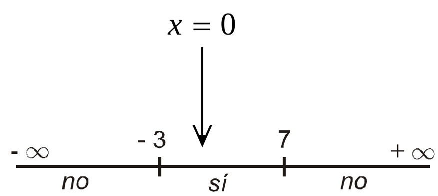
$$x_1 = 7$$
$$x_2 = -3$$

Probando con $x = 0$ en la desigualdad:

$$(0)^2 - 4(0) - 6 < 15$$

$-6 < 15$ ✔ cierto

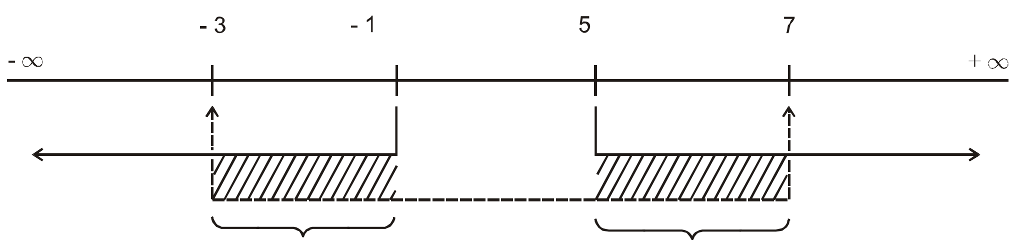
Significa que



$$\boxed{-3 < x < 7}$$

Como ambas condiciones deben cumplirse *al mismo tiempo*, se trata de una intersección.

Entonces la intersección de ambas soluciones es la solución de la desigualdad original:



$$\boxed{-3 < x < -1 \ \bigcup \ 5 < x < 7}$$

Probando con un valor de cada intervalo para verificar la solución obtenida:

a) Probando con $x = -4$ que pertenece a un intervalo *no solución*:

$$-1 < (-4)^2 - 4(-4) - 6 < 15$$

$-1 < 26 < 15$ ✗ falso (26 no es menor que 15)

b) Probando con $x = -2$ que pertenece a un intervalo *sí solución*:

$$-1 < (-2)^2 - 4(-2) - 6 < 15$$

$-1 < 6 < 15$ ✔ cierto

c) Probando con $x = 0$ que pertenece a un intervalo *no solución*:

$$-1 < (0)^2 - 4(0) - 6 < 15$$

$-1 < -6 < 15$ ✗ falso (-1 no es menor que -6)

d) Probando con $x = 6$ que pertenece a un intervalo *sí solución*:

$$-1 < (6)^2 - 4(6) - 6 < 15$$

$-1 < 6 < 15$ ✔ cierto

e) Probando con $x = 10$ que pertenece a un intervalo *no solución*:

$$-1 < (10)^2 - 4(10) - 6 < 15$$

$-1 < 54 < 15$ ✗ falso (54 no es menor que 15)

Nótese que el método de los intervalos puede aplicarse a esta desigualdad.

EJERCICIO 5

resolver las siguientes desigualdades:

1) $4 < 8x < 20$

2) $5 < 15x < 60$

3) $2 < x - 2 < 19$

4) $0 < 2x - 1 < 23$

5) $5 < 2x + 3 < 21$

6) $-2 < 1 - 3x < 34$

7) $-11 < 4 - 5x < 29$

8) $6 < 1 - 7x < 36$

9) $5 < x^2 - 6x - 2 < 14$

10) $8 < x^2 + 2x < 24$

11) $-12 < x^2 + 15x + 44 < 0$

12) $-2 < x^2 - 8x + 10 < 19$

13) $x < x^2 + 1 < 26$

14) $x - 1 < 5x - 1 < 14$