CAPÍTULO

1

Métodos de Integración

2.6 Integración de funciones racionales. Fracciones parciales

2.6.1 Introducción

En la sección anterior vimos que aplicando el cambio de variable $x = a \operatorname{sen} \theta$ se obtiene:

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C.$$

De igual manera, aplicando la sustitución trigonométrica $x = \operatorname{sen} \theta$ y el procedimiento del ejemplo **??** de la página **??** se obtendría:

$$\int \frac{2}{1 - x^2}\, dx = \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C.$$

Ahora bien, si consideramos:

$$\frac{2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x},$$

entonces podríamos afirmar que

$$\int \frac{2}{1 - x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \right) dx = \int \frac{dx}{1 + x} + \int \frac{dx}{1 - x} = \ln |1 + x| - \ln |1 - x| + C = \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C,$$

que es el mismo resultado, pero obtenido de una manera menos laboriosa.

Pero, ¿cómo pasar de la fracción $\dfrac{2}{1 - x^2}$ a la suma de fracciones $\dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{1}{1 - x}$?

Uno de los objetivos en esta sección es mostrar cómo descomponer fracciones algebraicas en fracciones más simples, para luego utilizarlas en el cálculo de integrales de funciones racionales.

canek.azc.uam.mx: 20/ 5/ 2015/ 594

2.6.2 Funciones racionales. Propias e impropias

Debemos tener presente algunos conceptos básicos sobre funciones.

- Una función polinomial es de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +, \dots, +a_n x^n,$$

donde los coeficientes a_0, a_1, a_2, ..., a_n son números reales y n es un número entero no-negativo. Cuando $a_n \neq 0$, se dice que $p(x)$ es una función polinomial o polinomio de grado n.

Por *ejemplo*: las funciones constantes $p(x) = a_0$ son polinomiales de grado cero; las funciones lineales $p(x) = a_0 + a_1 x$ son polinomios de grado 1 y las funciones cuadráticas $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ son polinomiales de grado 2.

- Una función racional es de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Es decir, una función racional $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +, \dots, +a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 +, \dots, +b_m x^m},$$

donde

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +, \dots, +a_n x^n \text{ es un polinomio de grado } n$$

y donde

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 +, \dots, +b_m x^m \text{ es un polinomio de grado } m.$$

En el contexto del álgebra elemental, una función racional es comúnmente denominada como una fracción algebraica.

Se supone siempre que en la función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ los polinomios $p(x), q(x)$ no tienen factores comunes, ya que en caso de existir, serían cancelados en la fracción.

- Una función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es propia cuando el grado n del polinomio numerador $p(x)$ es menor que el grado m del polinomio denominador (es decir, cuando $n < m$) y es impropia cuando $n \geq m$.

Por ejemplo, las fracciones racionales

$$\frac{2}{3x-4}, \quad \frac{x-1}{x^2-2x+2}, \quad \frac{x^2}{x^3+1}, \quad \frac{x}{x^4-1}, \quad \frac{1}{x^5}$$

son propias y las fracciones

$$\frac{x+1}{x-1}, \quad \frac{2x^3}{x^2-2x+1}, \quad \frac{x^4+1}{x^4-1}, \quad \frac{x^{10}}{x^5+1}$$

son ejemplos de fracciones racionales impropias.

Es importante tener presente que si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional impropia, entonces se puede efectuar la división del polinomio $p(x)$ entre el polinomio $q(x)$ y así obtener un cociente $c(x)$ y un residuo $r(x)$. El algoritmo de la división permite afirmar que

$$\begin{array}{r|l} & c(x) \\ \hline q(x) & p(x) \\ & \dots \\ & \;\dots \\ & \;\; r(x), \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde $c(x)$ & $r(x)$ son polinomios y el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, por lo que $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ es una función racional propia.

Por *ejemplo*: la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}$ es una función racional impropia, ya que el grado 3 del polinomio numerador $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ es mayor que el grado 2 del polinomio denominador $q(x) = x^2 + 1$. Al efectuar la división $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se obtiene:

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x - 3 \qquad \longleftrightarrow \quad \text{Cociente} \quad c(x) = 2x - 3. \\
x^2 + 1 \,\big| & 2x^3 - 3x^2 + 3x - 5 \\
 & -2x^3 \qquad\quad - 2x \\
\cline{2-2}
 & \quad -3x^2 + \quad x - 5 \\
 & \quad + 3x^2 \qquad\quad + 3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad x - 2 \qquad \longleftrightarrow \quad \text{Residuo} \quad r(x) = x - 2.
\end{array}
$$

El algoritmo de la división permite afirmar que

$$
\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1} = (2x - 3) + \frac{x - 2}{x^2 + 1}.
$$

2.6.3 Integral de funciones racionales impropias

Por lo visto en la sección anterior, el algoritmo de la división permite expresar a toda función racional impropia $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como la suma de un polinomio $c(x)$ y una función racional propia $\dfrac{r(x)}{q(x)}$.

Este resultado es fundamental para calcular integrales de funciones racionales impropias, ya que:

$$
\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \;\Rightarrow\; \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \left[c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right] \mathrm{d}x = \int c(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x.
$$

Esto es,

- La integral de una función racional impropia es igual a la integral de un polinomio $c(x)$, más la integral de una función racional propia $\dfrac{r(x)}{q(x)}$.

Ejemplo 2.6.1 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{2x - 1}\,\mathrm{d}x.$

▼ En este caso, el integrando $f(x) = \dfrac{6x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{2x - 1}$ es una función racional impropia, ya que el grado 3 del polinomio numerador $p(x) = 6x^3 - 7x^2 + 4x - 3$ es mayor que el grado 1 del polinomio denominador $q(x) = 2x - 1$. Luego, efectuamos la división

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x^2 - 2x + 1 \qquad \longleftrightarrow \quad \text{Cociente} \quad c(x) = 3x^2 - 2x + 1. \\
2x - 1 \,\big| & 6x^3 - 7x^2 + 4x - 3 \\
 & -6x^3 + 3x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -4x^2 + 4x - 3 \\
 & \qquad +4x^2 - 2x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2x - 3 \\
 & \qquad\quad -2x + 1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad -2 \qquad \longleftrightarrow \quad \text{Residuo} \quad r(x) = -2.
\end{array}
$$

Y así tenemos:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \Rightarrow \frac{6x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{2x - 1} = \left(3x^2 - 2x + 1\right) + \frac{-2}{2x - 1}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{2x - 1}\,\mathrm{d}x = \int \left[\left(3x^2 - 2x + 1\right) + \frac{-2}{2x - 1}\right]\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{d}x + \int \frac{-2\,\mathrm{d}x}{2x - 1} =$$
$$= x^3 - x^2 + x - \ln|2x - 1| + C.$$

□

Ejemplo 2.6.2 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$.

▼ Como anteriormente hemos visto,

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1} = (2x - 3) + \frac{x - 2}{x^2 + 1}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int \left[(2x - 3) + \frac{x - 2}{x^2 + 1}\right]\mathrm{d}x = \int (2x - 3)\,\mathrm{d}x + \int \frac{x - 2}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int (2x - 3)\,\mathrm{d}x + \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 + 1} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} =$$
$$= x^2 - 3x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) - 2\arctan x + C.$$

□

Ejemplo 2.6.3 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x - 13}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x$.

▼ El integrando $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x - 13}{x^2 + 4}$ es una función racional impropia. Al efectuar la división

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 4 \\ \hline x^2 + 4 & x^4 - 2x - 13 \\ & -x^4 - 4x^2 \\ \hline & -4x^2 - 2x - 13 \\ & +4x^2 \qquad + 16 \\ \hline & -2x \quad + 3, \end{array}$$

encontramos:

$$\frac{x^4 - 2x - 13}{x^2 + 4} = \left(x^2 - 4\right) + \frac{-2x + 3}{x^2 + 4}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^4 - 2x - 13}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x = \int \left[\left(x^2 - 4\right) + \frac{-2x + 3}{x^2 + 4}\right]\mathrm{d}x = \int \left(x^2 - 4\right)\mathrm{d}x + \int \frac{-2x + 3}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(x^2 - 4\right)\mathrm{d}x - \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2 + 4} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2^2} =$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x - \ln\left(x^2 + 4\right) + 3\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C =$$
$$= \frac{x^3}{3} - 4x - \ln\left(x^2 + 4\right) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

□

Ejemplo 2.6.4 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^3 - x}\,dx.$

▼ El integrando es una función racional impropia. Al efectuar la división:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x + 1 \\
\hline
x^3 - x & \quad 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3 \\
 & -2x^4 \qquad\quad + 2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad +x^3 \qquad\quad + x - 3 \\
 & \qquad -x^3 \qquad\quad + x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad +2x - 3,
\end{array}
$$

tenemos:

$$\frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^3 - x} = (2x + 1) + \frac{2x - 3}{x^3 - x}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3}{x^3 - x}\,dx = \int \left[(2x + 1) + \frac{2x - 3}{x^3 - x}\right] dx = \int (2x + 1)\,dx + \int \frac{2x - 3}{x^3 - x}\,dx =$$
$$= x^2 + x + \int \frac{2x - 3}{x^3 - x}\,dx.$$

Pero, ¿cómo calcular $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^3 - x}\,dx$? Es evidente que nos faltan herramientas.

□

2.6.4 Fracciones parciales

Una fracción parcial es una función racional de cualquiera de las formas siguientes:

1. $f(x) = \dfrac{A}{(ax + b)^n}$; con A, a & b constantes, $a \neq 0$, n es un entero positivo.
2. $g(x) = \dfrac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$, o bien $h(x) = \dfrac{B}{(ax^2 + bx + c)^n}$; donde A, B, a, b & c son constantes, n es un entero positivo y además $(ax^2 + bx + c)$ es un polinomio cuadrático irreducible

Es decir, una fracción parcial es una función racional (cociente de polinomios), esto es, puede ser:

1. Una constante A entre una potencia entera positiva de una función lineal $ax + b$
$$\frac{A}{(ax + b)^n}.$$
2. Una función lineal $Ax + B$ o bien una constante B entre una potencia entera positiva de un polinomio cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$
$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad \text{o bien} \quad \frac{B}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Aquí es importante tener presente la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- El polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ es irreducible.
- El número $b^2 - 4ac$ es negativo $(b^2 - 4ac < 0)$.

- La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales y sus soluciones son números complejos.
- El polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ no es factorizable mediante factores lineales (con coeficientes) reales.

Ejemplo 2.6.5 *Las funciones racionales*

$$f_1(x) = \frac{1}{2x-3}; \quad f_2(x) = \frac{-4}{(2x-3)^5}; \quad f_3(x) = \frac{5}{x}; \quad f_4(x) = \frac{23}{x^4}$$

son fracciones parciales.

▼ Son de la forma 1., esto es, constante entre una potencia entera positiva de una lineal.

□

Ejemplo 2.6.6 *El polinomio cuadrático $x^2 - 2x + 5$ es irreducible.*

▼ Tenemos que

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -6 < 0;$$

luego, el trinomio cuadrático $x^2 - 2x + 5$ no puede ser factorizado mediante factores lineales reales.

□

Ejemplo 2.6.7 *Las funciones racionales*

$$g_1(x) = \frac{3x-4}{x^2-2x+5}; \quad g_2(x) = \frac{x}{(x^2-2x+5)^3} \quad \& \quad g_3(x) = \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}$$

son fracciones parciales.

▼ El trinomio cuadrático $(x^2 - 2x + 5)$ es irreducible.

□

Ejemplo 2.6.8 *Las funciones racionales*

$$h_1(x) = \frac{3x-4}{x^2-5x+6}; \quad h_2(x) = \frac{x}{(x^2-5x+6)^2} \quad \& \quad h_3(x) = \frac{1}{(x^2-5x+6)^3}$$

no son fracciones parciales

▼ El trinomio cuadrático $(x^2 - 5x + 6)$ no es irreducible. Observe que

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0,$$

y además que $(x^2 - 5x + 6) = (x-2)(x-3)$.

□

Ejemplo 2.6.9 *El binomio cuadrático $x^2 + k^2$, con k real y con $k \neq 0$, es irreducible.*

▼ Observe que la ecuación cuadrática $x^2 + k^2 = 0$ no tiene soluciones reales, ya que

$$x^2 + k^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -k^2,$$

lo cual no puede suceder: un real no negativo x^2 no puede ser igual a un real negativo $(-k^2)$.

□

Ejemplo 2.6.10 *Las funciones racionales*

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x^2+1}; \quad f_2(x) = \frac{x}{(x^2+4)^2} \quad \& \quad f_3(x) = \frac{-2}{(x^2+9)^3},$$

son fracciones parciales.

▼ Los binomios cuadráticos $(x^2 + 1)$, $(x^2 + 4)$ y $(x^2 + 9)$ son irreducibles.

□

En vista de que uno de nuestros objetivos es integrar funciones racionales mediante la aplicación de fracciones parciales, es necesario que sepamos cómo integrar este tipo de funciones.

2.6.5 Integración de fracciones parciales

1. Si la fracción parcial es de la forma: $f(x) = \dfrac{A}{(ax+b)^n}$.

   Aplicamos el cambio de variable $y = ax + b \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a$ & $\mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x$.

   Por lo tanto:

   - Para $n = 1$,
   $$\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{A}{a}\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{A}{a}\ln|y| + K = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + K.$$
   - Para $n > 1$,
   $$\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{a}\int\frac{\mathrm{d}y}{y^n} = \frac{A}{a}\int y^{-n}\,\mathrm{d}y = \frac{A}{a}\left[\frac{y^{-n+1}}{-n+1}\right] + K = \frac{A}{a(-n+1)}\left[\frac{1}{y^{n-1}}\right] + K =$$
   $$= \frac{A}{a(1-n)}\left[\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}\right] + K.$$

2. Si la fracción parcial es de la forma: $f(x) = \dfrac{D}{(ax^2+bx+c)^n}$, con ax^2+bx+c irreducible y D constante.

   Primero es necesario operar algebraicamente sobre el trinomio cuadrático irreducible (ax^2+bx+c) para expresarlo mediante una suma de cuadrados, esto es, $ax^2+bx+c = a(u^2+\lambda^2)$.

   Consideramos que
   $$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+px+q\right);\ \text{donde } p = \frac{b}{a}\ \&\ q = \frac{c}{a}.$$
   Luego notamos que por ser ax^2+bx+c un cuadrático irreducible, también x^2+px+q es irreducible; por lo que $p^2-4q<0 \Rightarrow p^2 < 4q$.

   Ahora operamos algebraicamente sobre el trinomio x^2+px+q, pensando en construir el trinomio cuadrado perfecto asociado al binomio x^2+px.
   $$x^2+px+q = \left[x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right] + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left[x+\frac{p}{2}\right]^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} =$$
   $$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \lambda^2;$$
   donde $\lambda = \dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ es un número real ya que:
   $$4q > p^2 \Rightarrow 4q - p^2 > 0 \quad \& \quad \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
   Entonces,
   $$ax^2+bx+c = a\left(x^2+px+q\right) = a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\lambda^2\right].$$
   Y si aquí consideramos que $x + \dfrac{p}{2} = u$, obtenemos:
   $$ax^2+bx+c = a\left(x^2+px+q\right) = a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\lambda^2\right] = a\left[u^2+\lambda^2\right].$$

Por lo cual,
$$\left(ax^2+bx+c\right)^n=\left[a\left(u^2+\lambda^2\right)\right]^n=a^n\left(u^2+\lambda^2\right)^n .$$
Posteriormente, al integrar debemos considerar la igualdad $x+\dfrac{p}{2}=u$ como un cambio de variable, por lo que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1$ & $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Por lo tanto:

- Para $n=1$,
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\left(x^2+px+q\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\lambda^2}=$$
$$=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\lambda^2}=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{\lambda}\arctan\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right]+K=$$
$$=\frac{1}{a}\left[\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{4q-p^2}}\right]+K=$$
$$=\frac{2}{a\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+K,$$
donde $p=\dfrac{b}{a}$ & $q=\dfrac{c}{a}$.
- Para $n>1$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{\mathrm{d}u}{a^n\left(u^2+\lambda^2\right)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^n}.$$
Aquí podemos aplicar la sustitución trigonométrica:
$$u=\lambda\tan\theta,$$
por lo que:
$$\mathrm{d}u=\lambda\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\quad\&\quad u^2+\lambda^2=\lambda^2\tan^2\theta+\lambda^2=\lambda^2\left(\tan^2\theta+1\right)=\lambda^2\sec^2\theta.$$
Por lo tanto:
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{\lambda\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(\lambda^2\sec^2\theta\right)^n}=$$
$$=\frac{\lambda}{a^n}\int\frac{\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\lambda^{2n}\sec^{2n}\theta}=\frac{\lambda}{a^n\lambda^{2n}}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sec^{2n-2}\theta}=$$
$$=\frac{1}{a^n\lambda^{2n-1}}\int\cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{a^n\lambda^{2n-1}}\int\cos^{2(n-1)}\theta\,\mathrm{d}\theta,$$
donde el exponente $2(n-1)$ es entero positivo par, ya que n es natural y $n>1$. Luego, esta integral podrá ser calculada aplicando técnicas tratadas en la sección 2.4.

Ahora bien, existe otra manera de calcular la integral $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^n}$ y es utilizando una fórmula recursiva.

Dicha fórmula, que será demostrada al final de esta sección, es la siguiente: para m entero positivo,
$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^{m+1}}=\frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{1}{2m}\right)\frac{u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^m}+\left(1-\frac{1}{2m}\right)\int\frac{\mathrm{d}u}{\left(u^2+\lambda^2\right)^m}\right].$$
Con esto afirmamos que podemos calcular cualquier integral de la forma $\displaystyle\int\frac{D}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x$, para D constante, n entero positivo y ax^2+bx+c irreducible.

3. Si la fracción parcial es de la forma: $f(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, con A y B constantes y con ax^2+bx+c irreducible.
   Aquí primero aplicamos el cambio de variable $w = ax^2+bx+c \Rightarrow \mathrm{d}w = (2ax+b)\,\mathrm{d}x$.
   Expresamos la fracción parcial $f(x)$ como la suma de dos fracciones con el mismo denominador.
   Obtenemos así un par de integrales que podemos calcular.

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A\left(x+\dfrac{B}{A}\right)}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{2a\left(x+\dfrac{B}{A}\right)}{2a\,(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\dfrac{2aB}{A}}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\dfrac{2aB}{A}-b}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2a}\int \left[\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{\dfrac{2aB}{A}-b}{(ax^2+bx+c)^n}\right]\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{A}{2a}\int \frac{\dfrac{2aB}{A}-b}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^n} + \frac{A}{2a}\left(\frac{2aB}{A}-b\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^n} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}.
\end{aligned}$$

   Esto es,
$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^n} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}.$$
   Por lo tanto:

   - Para $n=1$,
$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \\
&= \frac{A}{2a}\ln|w| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \\
&= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)},
\end{aligned}$$
     donde la última integral ya ha sido calculada.
   - Para $n>1$,
$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x &= \frac{A}{2a}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^n} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a}\int w^{-n}\,\mathrm{d}w + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a}\left(\frac{w^{-n+1}}{-n+1}\right) + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a(-n+1)}\left(\frac{1}{w^{n-1}}\right) + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n} = \\
&= \frac{A}{2a(1-n)\,(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n},
\end{aligned}$$

donde la última integral ya ha sido calculada.

Ahora sí, con todo lo anterior, podemos afirmar que ya podemos calcular integrales de fracciones parciales.

Ejemplo 2.6.11 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \left[\frac{5}{3-2x} - \frac{4}{(3-2x)^5}\right] \mathrm{d}x$.

▼ Considerando el cambio de variable $y = 3 - 2x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2$ & $\mathrm{d}y = -2\,\mathrm{d}x$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int \left[\frac{5}{3-2x} - \frac{4}{(3-2x)^5}\right] \mathrm{d}x &= 5\int \frac{\mathrm{d}x}{3-2x} - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(3-2x)^5} = 5\int \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y} - 4\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}y}{y^5} = \\
&= -\frac{5}{2}\ln|y| + 2\int y^{-5}\,\mathrm{d}y = -\frac{5}{2}\ln|y| + 2\left(\frac{y^{-4}}{-4}\right) + C = \\
&= -\frac{5}{2}\ln|y| - \frac{1}{2y^4} + C = -\frac{5}{2}\ln|3-2x| - \frac{1}{2(3-2x)^4} + C = \\
&= -\frac{1}{2}\left[\ln|3-2x|^5 + \frac{1}{(3-2x)^4}\right] + C.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6.12 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2 - 2x + 1}$.

▼ Primero verificamos que el trinomio cuadrático $3x^2 - 2x + 1$ sea irreducible; como

$$\begin{aligned}
3x^2 - 2x + 1 = ax^2 + bx + c \ &\Rightarrow a = 3, b = -2 \,\&\, c = 1 \ \Rightarrow \\
&\Rightarrow b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8 < 0,
\end{aligned}$$

el trinomio cuadrático es irreducible.

A continuación expresamos el trinomio mediante una suma de cuadrados.

$$\begin{aligned}
3x^2 - 2x + 1 &= 3\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right] = 3\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right] = \\
&= 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right] = 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right] = 3\left[u^2 + \lambda^2\right],
\end{aligned}$$

donde $u = x - \dfrac{1}{3}$; $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Considerando el cambio de variable $u = x - \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 1$ & $du = dx$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2 - 2x + 1} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \lambda^2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\lambda}\arctan\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right] + K = \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2}}\right] + K = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3x - 1}{\sqrt{2}}\right) + K.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6.13 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2}$.

▼ Verificamos que el trinomio cuadrático sea irreducible:

$$x^2-2x+5 = ax^2+bx+c \Rightarrow a=1, b=-2 \;\&\; c=5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2-4ac = (-2)^2-4(1)(5) = 4-20 = -16 < 0.$$

Además:

$$x^2-2x+5 = \left(x^2-2x+1\right)+4 = (x-1)^2+4 = (x-1)^2+2^2.$$

Aplicando el cambio de variable $u = x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, por lo que,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x-1)^2+2^2]^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+2^2)^2}.$$

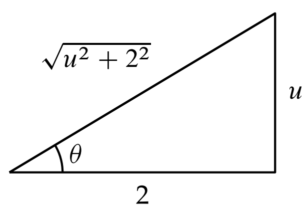
Con la sustitución trigonométrica :

$$u = 2\tan\theta \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta \quad \& \quad u^2+4 = 2^2\tan^2\theta+2^2 = 2^2\left(\tan^2\theta+1\right) = 2^2\sec^2\theta.$$

Entonces,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+2^2)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta}{(2^2\sec^2\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{2^4}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{16}\left[\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]+K = \frac{1}{16}\left[\theta+\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta)\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\theta+\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\right]+K.$$

Como $u = 2\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{u}{2}$.



Entonces:

$$\theta = \arctan\left(\frac{u}{2}\right);\ \operatorname{sen}\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+2^2}} \quad \& \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{u^2+4}}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+4)^2} = \frac{1}{16}\left[\theta+\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\arctan\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{u}{\sqrt{u^2+4}}\frac{2}{\sqrt{u^2+4}}\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\arctan\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{2u}{u^2+4}\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+4}\right]+K =$$
$$= \frac{1}{16}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5}\right]+K.$$

□

Ejemplo 2.6.14 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{3x-4}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$.

▼ x^2-2x+5 es un trinomio cuadrático irreducible.

Si aplicamos el cambio de variable $y = x^2-2x+5 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x-2$ & $\mathrm{d}y = (2x-2)\,\mathrm{d}x$.

Procedemos a construir esta diferencial en el numerador de la fracción que se aparece en el integrando.

$$3x+4 = 3\left(x+\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}(2)\left(x+\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x+\frac{8}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(2x-2+\frac{8}{3}+2\right) =$$
$$= \frac{3}{2}\left[(2x-2)+\frac{14}{3}\right] = \frac{3}{2}(2x-2)+7.$$

Luego expresamos la función racional como la suma de dos fracciones con igual denominador, para finalmente integrar mediante una suma de integrales.

$$\int \frac{3x-4}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2)+7}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{\frac{3}{2}(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} + \frac{7}{(x^2-2x+5)^2}\right]\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} =$$
$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{y}\right] + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{-3}{2\,(x^2-2x+5)} + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2}.$$

Donde utilizamos el resultado obtenido en el ejemplo anterior

$$\int \frac{3x-4}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-3}{2\,(x^2-2x+5)} + 7\left(\frac{1}{16}\right)\left[\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{2(x-1)}{(x^2-2x+5)}\right] + K =$$
$$= \frac{-3}{2\,(x^2-2x+5)} + \frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{7(x-1)}{8\,(x^2-2x+5)} + K =$$
$$= \frac{(-3)(4)+7(x-1)}{8\,(x^2-2x+5)} + \frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + K =$$
$$= \frac{7x-19}{8\,(x^2-2x+5)} + \frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + K.$$

□

Ejemplo 2.6.15 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3}$.

▼ Podemos calcular esta integral de dos maneras diferentes: una es aplicando la sustitución trigonométrica $x = 3\tan\theta$, en cuyo caso debemos calcular la integral $\displaystyle\int \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$; y otra manera es utilizando la fórmula recursiva

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{1}{2m}\right)\frac{u}{(u^2+\lambda^2)^m} + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m}\right].$$

Optamos por la aplicación de esta fórmula para $u = x, \lambda = 3 \quad \& \quad m = 2$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^{2+1}} = \frac{1}{3^2}\left[\frac{1}{2(2)}\frac{x}{(x^2+3^2)^2} + \left(1-\frac{1}{2(2)}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{4}\right)\frac{x}{(x^2+9)^2} + \left(1-\frac{1}{4}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2}\right] = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{4}\right)\frac{x}{(x^2+9)^2} + \left(\frac{3}{4}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2}\right].$$

Esto es:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3} = \frac{x}{36\,(x^2+9)^2} + \frac{1}{12}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2}. \tag{*}$$

Aplicamos de nuevo la fórmula recursiva para $m = 1$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^{1+1}} = \frac{1}{3^2}\left[\frac{1}{2(1)}\frac{x}{(x^2+3^2)^1} + \left(1-\frac{1}{2(1)}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3^2)^1}\right] = \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+9)} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)}\right] = \frac{1}{18}\left(\frac{x}{x^2+9}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3^2} = \\ &= \frac{x}{18\,(x^2+9)} + \frac{1}{18}\left[\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right] + K.\end{aligned}$$

Utilizamos este resultado y sustituimos en $(*)$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3} &= \frac{x}{36\,(x^2+9)^2} + \frac{1}{12}\left[\frac{x}{18\,(x^2+9)} + \frac{1}{54}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right] + K = \\ &= \frac{x}{36\,(x^2+9)^2} + \frac{x}{(12)(18)\,(x^2+9)} + \frac{1}{(12)(54)}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + K\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3} = \frac{1}{36}\left[\frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{x}{6\,(x^2+9)^2} + \frac{1}{18}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right] + K.$$

□

Ejemplo 2.6.16 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{6x+3}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x$.

▼ ¿Es irreducible el trinomio x^2-4x+5?

$$\begin{aligned}&x^2-4x+5 = ax^2+bx+c \;\Rightarrow a = 1, b = -4 \,\&\, c = 5 \;\Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow b^2-4ac = (-4)^2-4(1)(5) = 16-20 = -4 < 0.\end{aligned}$$

Sí, x^2-4x+5 es un cuadrático irreducible. Si consideramos el cambio de variable:

$$y = x^2-4x+5 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x-4 \quad \& \quad \mathrm{d}y = (2x-4)\,\mathrm{d}x.$$

Procedemos a construir la diferencial $\mathrm{d}y$, para luego expresar la función racional del integrando como una suma de fracciones y así calcular la integral mediante una suma de integrales.

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+3}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{2x+1}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{2x-4+1+4}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{(2x-4)+5}{(x^2-4x+5)^3}\,\mathrm{d}x = \\ &= 3\int\left[\frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^3} + \frac{5}{(x^2-4x+5)^3}\right]\mathrm{d}x = \\ &= 3\int \frac{(2x-4)\,\mathrm{d}x}{(x^2-4x+5)^3} + 15\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+5)^3}.\end{aligned}$$

Calculamos ahora este par de integrales para luego realizar las sustituciones pertinentes.

$$\int \frac{(2x-4)\,\mathrm{d}x}{(x^2-4x+5)^3} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^3} = \int y^{-3}\,\mathrm{d}y = \frac{y^{-2}}{-2} + C_1 = -\frac{1}{2y^2} + C_1 = -\frac{1}{2\,(x^2-4x+5)^2} + C_1.$$

Para calcular la segunda integral:

$$x^2-4x+5 = \left(x^2-4x\right)+5 = \left(x^2-4x+4\right)+5-4 = (x-2)^2+1.$$

Entonces:

$$x^2 - 4x + 5 = u^2 + 1 \text{ con } u = x - 2.$$

Además, con el cambio de variable $u = x - 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Por lo tanto:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 4x + 5)^3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x-2)^2 + 1]^3} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + 1)^3}.$$

Aquí aplicaremos la fórmula recursiva:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + \lambda^2)^{m+1}} = \frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{1}{2m}\right)\frac{u}{(u^2 + \lambda^2)^m} + \left(1 - \frac{1}{2m}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + \lambda^2)^m}\right],$$

considerando que $\lambda = 1$. Además, será aplicada dos veces: primero con $m = 2$ y luego con $m = 1$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + 1)^3} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + 1^2)^{2+1}} = \frac{1}{2(2)}\frac{u}{(u^2 + 1)^2} + \left(1 - \frac{1}{4}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{u}{4(u^2 + 1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + 1)^{1+1}} = \\
&= \frac{u}{4(u^2 + 1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2(1)}\frac{u}{(u^2 + 1)^1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + 1)^1}\right] = \\
&= \frac{u}{4(u^2 + 1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{u}{2(u^2 + 1)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1}\right] = \\
&= \frac{u}{4(u^2 + 1)^2} + \frac{3u}{8(u^2 + 1)} + \frac{3}{8}\arctan u + C_2.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 4x + 5)^3} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x-2)^2 + 1]^3} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + 1)^3} = \\
&= \frac{u}{4(u^2 + 1)^2} + \frac{3u}{8(u^2 + 1)} + \frac{3}{8}\arctan u + C_2 = \\
&= \frac{(x-2)}{4(x^2 - 4x + 5)^2} + \frac{3(x-2)}{8(x^2 - 4x + 5)} + \frac{3}{8}\arctan(x - 2) + C_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{6x + 3}{(x^2 - 4x + 5)^3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{(2x - 4)\,\mathrm{d}x}{(x^2 - 4x + 5)^3} + 15\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 4x + 5)^3} = \\
&= 3\left[\frac{-1}{2(x^2 - 4x + 5)^2}\right] + 15\left[\frac{x-2}{4(x^2 - 4x + 5)^2} + \frac{3(x-2)}{8(x^2 - 4x + 5)} + \frac{3}{8}\arctan(x-2)\right] + C = \\
&= \frac{-3}{2(x^2 - 4x + 5)^2} + \frac{15(x-2)}{4(x^2 - 4x + 5)^2} + \frac{45(x-2)}{8(x^2 - 4x + 5)} + \frac{45}{8}\arctan(x-2) + C = \\
&= \frac{15x - 36}{4(x^2 - 4x + 5)^2} + \frac{45(x-2)}{8(x^2 - 4x + 5)} + \frac{45}{8}\arctan(x-2) + C.
\end{aligned}$$

□

2.6.6 Integración de funciones racionales propias por fracciones parciales

Ya hemos visto cómo proceder para integrar funciones racionales impropias y también cómo integrar fracciones parciales. Ahora veremos cómo proceder para integrar funciones racionales propias.

Es decir, nuestro objetivo ahora es calcular integrales de funciones racionales $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde el grado del polinomio numerador $p(x)$ sea menor que el grado del polinomio denominador $q(x)$.

Para esto es necesario escribir a $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como una suma de fracciones parciales que, como sabemos son fracciones con denominadores lineales o cuadráticos irreducibles, o bien son potencias naturales de estos.

Y para tener los denominadores de dichas fracciones parciales es necesario factorizar el polinomio denominador $q(x)$, para lo cual se considera que:

- Todo polinomio con coeficientes reales puede ser expresado, de manera única, como producto de factores lineales y/o cuadráticos irreducibles.

Sobra decir que, en esta etapa, debemos tener presentes los diversos procesos de factorización.

Una vez factorizado el denominador $q(x)$, se procede a obtener las fracciones parciales mediante un procedimiento algebraico que depende de los factores obtenidos para $q(x)$.

Mediante ejemplos, mostraremos procedimientos para casos específicos.

Caso 1. Los factores de $q(x)$ son todos lineales y diferentes.

En este caso:

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n),$$

en donde los factores $(a_ix + b_i)$ son todos diferentes.

Aquí se aplica el criterio siguiente:

⋆ $\boxed{\text{Cada factor lineal } (a_ix + b_i) \text{ genera una fracción parcial de la forma } \dfrac{A_i}{a_ix + b_i} \text{ con } A_i \text{ constante.}}$

En este caso debemos proponer que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n},$$

con $A_1, A_2, \cdots, A_n$ constantes.

Para determinar los valores de las constantes A_i se procede a obtener la suma de estas fracciones parciales, la cual tendrá como mínimo común denominador al mismo $q(x)$. La igualdad de la función racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con la suma de las fracciones nos llevarán a una igualdad de (los) polinomios (numeradores), que permitirá el cálculo de las constantes A_i mediante la solución de un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 2.6.17 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 5x - 18}{x^3 + x^2 + 6x}\,\mathrm{d}x.$

▼ Primero notamos que el integrando es una función racional propia.

Luego factorizamos al polinomio denominador $q(x)$.

$$q(x) = x^3 + x^2 - 6x = x\left(x^2 + x - 6\right) = x(x - 2)(x + 3).$$

Aquí hay tres factores lineales diferentes: x, $(x - 2)$ & $(x + 3)$.
Para expresar (descomponer) la función racional como una suma de fracciones parciales aplicamos el siguiente criterio:

◦ Cada factor lineal $(ax + b)$ de $q(x)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{A}{ax + b}$ con A constante.

$$\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x} = \frac{2x^2-5x-18}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+3)}.$$

Sumamos las fracciones parciales propuestas y obtenemos:

$$\frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}.$$

Se tiene entonces la igualdad

$$\frac{2x^2-5x-18}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}.$$

En esta igualdad de fracciones vemos que los denominadores coinciden. Por esto inferimos que los numeradores deben ser iguales y debe cumplirse:

$$\begin{aligned} 2x^2-5x-18 &= A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) = \\ &= A(x^2+x-6) + B(x^2+3x) + C(x^2-2x) = \\ &= Ax^2 + Ax - 6a + Bx^2 + 3Bx + Cx^2 - 2Cx = \\ &= (A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x + (-6A). \end{aligned}$$

Esta igualdad de polinomios ocurre cuando y sólo cuando los coeficientes de los términos del mismo grado, son iguales. Esto es, cuando:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 2; \\ A+3B-2C &= -5; \\ -6A &= -18. \end{aligned}$$

Obtenemos la solución de este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, de la siguiente manera:

De $-6A = -18$ se obtiene $A = 3$. Luego,

$$\begin{aligned} A+B+C &= 2 \quad \& \ A = 3 \Rightarrow 3+B+C = 2 \quad \Rightarrow B+C = -1. \\ A+3B-2C &= -5 \quad \& \ A = 3 \Rightarrow 3+3B-2C = -5 \quad \Rightarrow 3B-2C = -8. \end{aligned}$$

Multiplicamos por 2 la primera ecuación y el resultado se suma con la segunda.

$$\begin{aligned} 2B+2C &= -2; \\ 3B-2C &= -8; \\ \hline 5B &= -10; \\ B &= -2. \end{aligned}$$

Luego,

$$B+C = -1 \ \& \ B = -2 \Rightarrow -2+C = -1 \Rightarrow C = 1.$$

Los valores de constantes son $A = 3$, $B = -2$, $C = 1$. Por lo tanto:

$$\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} = \frac{3}{x} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{x+3}.$$

Finalmente, integramos y obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}\,dx &= \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right) dx = 3\ln x - 2\ln(x-2) + \ln(x+3) + K_1 = \\ &= \ln x^3 - \ln(x-2)^2 + \ln(x+3) + \ln K = \ln\left[\frac{Kx^3(x+3)}{(x-2)^2}\right]. \end{aligned}$$

□

Observación. En este caso, en que el denominador $q(x)$ tiene factores lineales diferentes, disponemos de otra manera para determinar los valores de las constantes que son numeradores de las fracciones parciales propuestas.

Primero se realiza el procedimiento visto, desde el inicio hasta que se obtiene la igualdad de los polinomios numeradores; a continuación se identifican las raíces del denominador $q(x)$, para luego usarlas (una por una) en la igualdad de los polinomios numeradores. De cada sustitución efectuada se obtiene el valor de una de las constantes.

Ejemplificamos esto con el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.6.18 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2+6x}\,\mathrm{d}x$.

▼

Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x$ procedimos así:

$$\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x} = \frac{2x^2-5x-18}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+3)} = \frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}.$$

Esta igualdad de fracciones, con denominadores iguales, nos llevó a la igualdad de los polinomios numeradores

$$2x^2-5x-18 = A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2). \tag{2.1}$$

Ahora bien, las raíces del polinimio denominador $q(x) = x(x-2)(x+3)$ son: $x=0$, $x=2$, $x=-3$.

- Utilizando $x=0$ en la igualdad (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} 2(0)^2-5(0)-18 &= A(0-2)(0+3)+B(0)(0+3)+C(0)(0-2) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; -18 = A(-2)(3) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; -18 = A(-6) \;\Rightarrow\; A = 3. \end{aligned}$$

- Utilizando $x=2$ en la igualdad (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} 2(2)^2-5(2)-18 &= A(2-2)(2+3)+B(2)(2+3)+C(2)(2-2) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; -20 = A(0)+B(2)(5)+C(0) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; -20 = B(10) \;\Rightarrow\; B = -2. \end{aligned}$$

- Utilizando $x=-3$ en la igualdad (2.1), se obtiene

$$\begin{aligned} 2(-3)^2-5(-3)-18 &= A(-3-2)(-3+3)+B(-3)(-3+3)+C(-3)(-3-2) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; 15 = A(-5)(0)+B(-3)(0)+C(-3)(-5) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; 15 = C(15) \;\Rightarrow\; C = 1. \end{aligned}$$

Entonces, como ya sabíamos, $A=3$, $B=-2$, $C=1$.

Luego, completando el ejemplo,

$$\frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+3)} = \frac{3}{x}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+3}.$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-5x-18}{x^3+x^2-6x}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = 3\ln x - 2\ln(x-2)+\ln(x+3)+K = \\ &= \ln\left[\frac{Kx^3(x+3)}{(x-2)^2}\right]. \end{aligned}$$

Caso 2. Cuando en $q(x)$ se tiene un factor lineal repetido.

Aquí consideramos que $q(x)$ tiene al menos un factor $(\alpha x+\beta)^m$, lo que es indicativo de que el factor lineal $(\alpha x+\beta)$ se repite m–veces.

En este:

- Cada factor $(\alpha x+\beta)^m$, que es un factor lineal con exponente m, genera las m fracciones parciales siguientes:
$$\frac{B_1}{\alpha x+\beta}+\frac{B_2}{(\alpha x+\beta)^2}+\frac{B_3}{(\alpha x+\beta)^3}+\cdots+\frac{B_m}{(\alpha x+\beta)^m},$$
donde $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_m$ son constantes.

Por ejemplo:
$$q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_kx+b_k)(\alpha x+\beta)^m,$$
con los factores lineales (a_ix+b_i) todos diferentes, para descomponer a $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ en fracciones parciales se debe considerar:

1. Cada factor (a_ix+b_i) genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{A_i}{a_ix+b_i}$, con A_i constante.
2. El factor $(\alpha x+\beta)^m$ genera las m fracciones parciales ya mencionadas.

Por lo tanto, la descomposición sería:
$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}+\left[\frac{B_1}{\alpha x+\beta}+\frac{B_2}{(\alpha x+\beta)^2}+\cdots+\frac{B_m}{(\alpha x+\beta)^m}\right].$$

Para determinar los valores de las constantes A_i, B_i se procede algebraicamente como en el caso anterior.

Ejemplo 2.6.19 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{10x-16}{(x^2-4)(x^2-2x+1)}\,dx$.

▼ El integrando es una función racional propia. Factorizamos el polinomio denominador $q(x)$.
$$q(x)=\left(x^2-4\right)\left(x^2-2x+1\right)=(x+2)(x-2)(x-1)^2.$$

Vemos aquí dos factores lineales diferentes, $(x+2)$ y $(x-2)$, así como un factor lineal repetido, $(x-1)^2$.

1. El factor $(x+2)$ genera una fracción parcial $\dfrac{A}{x+2}$.
2. El factor $(x-2)$ genera una fracción parcial $\dfrac{B}{x-2}$.
3. El factor $(x-1)^2$ genera dos fraciones parciales $\dfrac{C}{x-1}$, $\dfrac{D}{(x-1)^2}$.

Por lo tanto:
$$\frac{10x-16}{(x^2-4)(x^2-2x+1)}=\frac{10x-16}{(x+2)(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{A(x-2)(x-1)^2+B(x+2)(x-1)^2+C(x+2)(x-2)(x-1)+D(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x-1)^2}.$$

Esta igualdad de fracciones, con denominadores iguales, se cumple cuando los numeradores son iguales.

$$\begin{aligned}10x-16 &= A(x-2)(x-1)^2+B(x+2)(x-1)^2+C(x+2)(x-2)(x-1)+D(x+2)(x-2) = \\ &= A\left(x^3-4x^2+5x-2\right)+B\left(x^3-3x+2\right)+C\left(x^3-x^2-4x+4\right)+D(x^2-4) = \\ &= (A+B+C)x^3+(-4A-C+D)x^2+(5A-3B-4C)x+(-2A+2B+4C-4D).\end{aligned}$$

Esta última igualdad de polinomios se cumple cuando se satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -4A-C+D=0 \\ 5A-3B-4C=10 \\ -2A+2B+4C-4D=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0; & \text{(Ec. 1)} \\ -4A-C+D=0; & \text{(Ec. 2)} \\ 5A-3B-4C=10; & \text{(Ec. 3)} \\ -A+B+2C-2D=-8. & \text{(Ec. 4)} \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema así:

$$\begin{aligned} 4(\text{Ec. }1)+(\text{Ec. }3) \;&\Rightarrow\; 9A+B=10 \\ 2(\text{Ec. }2)+(\text{Ec. }4) \;&\Rightarrow\; \underline{-9A+B}=-8 \\ &\qquad\quad 2B=2 \;\Rightarrow\; B=1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9A+B=10 \;\&\; B=1 &\Rightarrow 9A+1=10 && \Rightarrow A=1; \\ A+B+C=0, A=1 \;\&\; B=1 &\Rightarrow 1+1+C=0 && \Rightarrow C=-2; \\ -4A-C+D=0, A=1 \;\&\; C=-2 &\Rightarrow -4+2+D=0 && \Rightarrow D=2. \end{aligned}$$

Luego entonces,

$$\frac{10x-16}{(x^2-4)\,(x^2-2x+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2} = \frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{-2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{10x-16}{(x^2-4)\,(x^2-2x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int\left[\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x = \\ &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+2\int(x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \ln(x+2)+\ln(x-2)-2\ln(x-1)+2\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]+K = \\ &= \ln(x+2)+\ln(x-2)-\ln(x-1)^2-\frac{2}{(x-1)}+K = \\ &= \ln\left[\frac{x^2-4}{(x-1)^2}\right]-\frac{2}{(x-1)}+K.\end{aligned}$$

□

Observación. Con respecto a la otra manera para determinar los valores de las constantes (comentada en el caso anterior), que son los numeradores de las fracciones parciales propuestas, el procedimiento en este ejemplo es el siguiente.

Tomando en cuenta la igualdad de los numeradores

$$10x-16 = A(x-2)(x-1)^2+B(x+2)(x-1)^2+C(x+2)(x-2)(x-1)+D(x+2)(x-2), \tag{2.2}$$

y las raíces del denominador $q(x)=(x+2)(x-2)(x-1)^2$, que son $x=-2$, $x=2$ y $x=1$ (de multiplicidad 2); usamos cada raíz en la igualdad (2.2) , para determinar los valores de la constantes A, B, C, D.

$$
\begin{array}{lll}
x=-2 \text{ en } (2.2) \Rightarrow 10(-2)-16=A(-4)(-3)^2+B(0)+C(0)+D(0) & \Rightarrow -36=A(-36) & \Rightarrow A=1.\\
x=2 \text{ en } (2.2) \Rightarrow 10(2)-16=A(0)+B(4)(1)^2+C(0)+D(0) & \Rightarrow 4=B(4) & \Rightarrow B=1.\\
x=1 \text{ en } (2.2) \Rightarrow 10(1)-16=A(0)+B(0)+C(0)+D(3)(-1) & \Rightarrow -6=D(-3) & \Rightarrow D=2.
\end{array}
$$

Ya utilizamos todas las raíces y pero todavía falta por determinar el valor de la constante C.

¿Qué hacer? Ante esta situación, utilizamos los valores $A=1$, $B=1$, $D=2$ en la igualdad (2.2) y obtenemos:

$$10x-16=1(x-2)(x-1)^2+1(x+2)(x-1)^2+C(x+2)(x-2)(x-1)+2(x+2)(x-2).$$

Ahora desarrollamos, simplificamos y despejamos C.

$$
\begin{aligned}
&10x-16=\left(x^3-4x^2+5x-2\right)+\left(x^3-3x+2\right)+C(x+2)(x-2)(x-1)+2\left(x^2-4\right) \Rightarrow\\
&\Rightarrow 10x-16=2x^3-2x^2+2x-8+C(x+2)(x-2)(x-1) \Rightarrow\\
&\Rightarrow -2x^3+2x^2+8x-8=C(x+2)(x-2)(x-1) \Rightarrow\\
&\Rightarrow C=\frac{-2x^3+2x^2+8x-8}{(x+2)(x-2)(x-1)}=\frac{-2\left(x^3-x^2-4x+4\right)}{x^3-x^2-4x+4}=-2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, como ya sabíamos, los valores de las constantes son $A=1$, $B=1$, $C=-2$, $D=2$.

Caso 3. Cuando en $q(x)$ hay factores cuadráticos irreducibles (ax^2+bx+c) o bien $\left(ax^2+bx+c\right)^m$ [el exponente m indica que el cuadrático irreducible $\left(ax^2+bx+c\right)$ se repite m–veces].

El criterio que se aplica en este caso es el siguiente:

1. Cada factor cuadrático irreducible diferente $\left(ax^2+bx+c\right)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, con A y B constantes.
2. Cada factor cuadrático irreducible repetido $\left(ax^2+bx+c\right)^m$ genera las m fracciones parciales siguientes
$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{\left(ax^2+bx+c\right)^m},$$
con A_i y B_i constantes, para $i=1,2,\ldots,m$.

Para determinar los valores de las constantes A_i, B_i se lleva a cabo el mismo procedimiento algebraico aplicado en los casos anteriores.

Ejemplo 2.6.20 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x^2-4x-1}{x^4-1}\,dx$.

▼ Notamos primero que el integrando es una función racional propia.

Luego factorizamos el denominador $q(x)$.

$$q(x)=x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right).$$

Para expresar mediante fracciones parciales al integrando debemos considerar que:

1. El factor lineal $(x-1)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{A}{x-1}$.
2. El factor lineal $(x+1)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{B}{x+1}$.
3. El factor cuadrático irreducible $\left(x^2+1\right)$ genera una fracción parcial de forma $\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4x-1}{x^4-1} &= \frac{x^2-4x-1}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1} = \\ &= \frac{A(x+1)\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}.\end{aligned}$$

Esta igualdad de fracciones, con igual denominador, se cumple cuando los polinomios numeradores son iguales

$$\begin{aligned}x^2-4x-1 &= A(x+1)\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)(x-1)(x+1) = \\ &= A\left(x^3+x^2+x+1\right)+B\left(x^3-x^2+x-1\right)+C\left(x^3-x\right)+D\left(x^2-1\right) = \\ &= (A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D).\end{aligned}$$

Esta igualdad de polinomios se cumple cuando los términos del mismo grado tienen coeficientes iguales. Es decir, se debe satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+B+C=0; & \text{(Ec. 1)} \\ A-B+D=1; & \text{(Ec. 2)} \\ A+B-C=-4; & \text{(Ec. 3)} \\ A-B-D=-1. & \text{(Ec. 4)} \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema de la siguiente manera.

Sumando (Ec. 1) con (Ec. 3), se obtiene: $2A+2B=-4$.

Sumando (Ec. 2) con (Ec. 4), se obtiene: $2A-2B=0$.

Y sumando este último par de ecuaciones se obtiene: $4A=-4$; de donde $A=-1$. Luego,

$$\begin{array}{rclcl} 2A-2B=0 & \& & A=-1 \Rightarrow B=A=-1 & \Rightarrow & B=-1; \\ A+B+C=0 & \& & A=B=-1 \Rightarrow -1-1+C=0 & \Rightarrow & C=2; \\ A-B+D=1 & \& & A=B=-1 \Rightarrow 0+D=1 & \Rightarrow & D=1. \end{array}$$

Entonces:

$$\frac{x^2-4x-1}{x^4-1} = \frac{-1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-4x-1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \int\left(-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \\ &= -\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+K = \\ &= -\left[\ln(x-1)+\ln(x+1)\right]+\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+K = \\ &= -\ln\left[(x-1)(x+1)\right]+\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+K = \\ &= -\ln\left(x^2-1\right)+\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x+K = \\ &= \ln\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]+\arctan x+K.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6.21 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+1}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

▼ Primero notamos que el integrando es una función racional propia.

Luego factorizamos el denominador $q(x)$.

$$q(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = \left(x^2\right)^2 + 2\left(x^2\right) + 1^2 = \left(x^2+1\right)^2.$$

Aquí se tiene un factor cuadrático irreducible $\left(x^2+1\right)$ repetido dos veces, por lo cual genera dos fracciones parciales con numeradores lineales. Esto es,

$$\frac{x^2-2x+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{(Ax+B)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Esta igualdad de fracciones, con denominadores iguales, se cumple cuando los numeradores son iguales.

$$\begin{aligned} x^2-2x+1 &= (Ax+B)\left(x^2+1\right)+(Cx+D) = A\left(x^3+x\right)+B\left(x^2+1\right)+C(x)+D = \\ &= (A)x^3+(B)x^2+(A+C)x+(B+D). \end{aligned}$$

Igualdad de polinomios que se cumple cuando:

$$A = 0;\, B = 1;\, A + C = -2;\, B + D = 1 \;\Rightarrow\; A = 0;\, B = 1;\, C = -2;\, D = 0.$$

Entonces,

$$\frac{x^2-2x+1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-2x+1}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right]\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \left(x^2+1\right)^{-2} 2x\,\mathrm{d}x = \\ &= \arctan x - \frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1} + K = \arctan x + \frac{1}{x^2+1} + K. \end{aligned}$$

□

En el siguiente ejemplo haremos uso del teorema del Factor, el cual asegura que:

- Si $x = r$ es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $(x-r)$ es un factor de $P(x)$. Es decir, si $P(r) = 0$, entonces $(x-r)$ es un factor de $P(x)$.

  Además, si $(x-r)$ es un factor de $P(x)$, entonces $P(x) = (x-r)R(x)$; donde $R(x)$ es otro factor polinomial que se obtiene efectuando la división $\dfrac{P(x)}{x-r}$.

Ejemplo 2.6.22 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{3x^2-8x+13}{x^3-3x^2+7x-5}\,\mathrm{d}x$.

▼ Es evidente que el integrando es una función racional propia.

Aquí, al denominador $q(x) = x^3-3x^2+7x-5$ no se le identifica fácilmente con una expresión factorizable.

Pensando en el teorema del Factor nos preguntamos ¿qué valor de x produce $q(x) = 0$?

Si $x = 1$:

$$q(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 7(1) - 5 = 1 - 3 + 7 - 5 = 8 - 8 = 0.$$

Luego, $x = 1$ es una raíz de $q(x)$. Entonces, por el teorema del Factor se afirma que $(x-1)$ es un factor del polinomio $q(x)$. Esto es, $q(x) = (x-r)R(x)$, donde

$$R(x) = \frac{q(x)}{x-r} = \frac{x^3-3x^2+7x-5}{x-1} = x^2-2x+5.$$

Es decir, $q(x) = (x-1)\left(x^2-2x+5\right)$.

El polinomio $\left(x^2-2x+5\right)$ es un factor irreducible, ya que:

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0.$$

Ahora bien, para descomponer el integrando mediante fracciones parciales debemos considerar que:

1. El factor lineal $(x-1)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{A}{x-1}$.
2. El factor cuadrático irreducible $\left(x^2-2x+5\right)$ genera una fracción parcial de la forma $\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+5}$.

Luego,

$$\frac{3x^2-8x+13}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{3x^2-8x+13}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} = \frac{A\left(x^2-2x+5\right)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}.$$

Desarrollando el último numerador:

$$\begin{aligned} A\left(x^2-2x+5\right)+(Bx+C)(x-1) &= A\left(x^2-2x+5\right)+B\left(x^2-x\right)+C(x-1) = \\ &= (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C). \end{aligned}$$

Igualamos con el numerador original:

$$(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C) = 3x^2-8x+13.$$

Igualdad que se cumple cuando

$$\begin{aligned} & A+B=3; -2A-B+C=-8 \quad \& \quad 5A-C=13 \Rightarrow \\ \Rightarrow\ & B=3-A; -2A-B+C=-8 \quad \& \quad C=5A-13. \end{aligned}$$

Usando $B = 3-A$ & $C = 5A-13$ en $-2A-B+C=-8$, se obtiene $4A = 8$, de donde $A = 2$. Luego, $B = 3-A = 3-2 = 1$ & $C = 5A-13 = 5(2)-13 = -3$.

Entonces:

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)} = \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2-2x+5}.$$

Por lo que

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{x-3}{x^2-2x+5}\,dx.$$

Observe que $y = x^2-2x+5 \Rightarrow dy = (2x-2)\,dx$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-8x+13}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx &= 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2(x-3)}{x^2-2x+5}\,dx = \\ &= 2\ln(x-1) + \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)-4}{x^2-2x+5}\,dx = \\ &= \ln(x-1)^2 + \frac{1}{2}\int \left[\frac{2x-2}{x^2-2x+5} - \frac{4}{x^2-2x+5}\right] dx = \\ &= \ln(x-1)^2 + \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)}{x^2-2x+5}\,dx - \frac{4}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \\ &= \ln(x-1)^2 + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} - 2\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)+4} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln(x-1)^2 + \frac{1}{2}\ln y - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+2^2} = \\
&= \ln(x-1)^2 + \ln y^{\frac{1}{2}} - 2\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right] + K = \\
&= \ln(x-1)^2 + \ln\sqrt{x^2-2x+5} - \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + K.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.6.23 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{-2x^2+8x+2}{x^4-2x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

▼ El integrando es una función racional propia. Factorizamos el polinomio denominador $q(x)$.

$$q(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = \left(x^2\right)^2 - 2\left(x^2\right) + 1 = \left(x^2-1\right)^2 = [(x-1)(x+1)]^2 \Rightarrow q(x) = (x-1)^2(x+1)^2.$$

Expresamos el integrando mediante fracciones parciales

$$
\begin{aligned}
\frac{-2x^2+8x+2}{x^4-2x^2+1} &= \frac{-2x^2+8x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} = \\
&= \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Esta igualdad de fracciones, con denominadores iguales, se cumple cuando los numeradores son iguales

$$
\begin{aligned}
-2x^2+8x+2 &= A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2 = \\
&= A\left(x^3+x^2-x-1\right) + B\left(x^2+2x+1\right) + C\left(x^3-x^2-x+1\right) + D\left(x^2-2x+1\right) = \\
&= (A+C)x^3 + (A+B-C+D)x^2 + (-A+2B-C-2D)x + (-A+B+C+D).
\end{aligned}
$$

Igualdad de polinomios que se cumple cuando

$$
\begin{cases}
A + C = 0; & \text{(Ec. 1)}\\
A + B - C + D = -2; & \text{(Ec. 2)}\\
-A + 2B - C - 2D = 8; & \text{(Ec. 3)}\\
-A + B + C + D = 2. & \text{(Ec. 4)}
\end{cases}
$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones de la forma siguiente:

Sumando (Ec. 1) con (Ec. 3), se obtiene: $2B - 2D = 8$.

Sumando (Ec. 2) con (Ec. 4), se obtiene: $2B + 2D = 0$.

Sumando este par de ecuaciones se obtiene $4B = 8$, de donde $B = 2$.

Luego se obtienen los valores $D = -2$, $A = -1$, $C = 1$.

Entonces:

$$\frac{-2x^2+8x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{-2x^2+8x+2}{x^4-2x^2+1}\,dx = \int \left[-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right] dx =$$
$$= -\int \frac{dx}{x-1} + 2\int (x-1)^{-2}\,dx + \int \frac{dx}{x+1} - 2\int (x+1)^{-2}\,dx =$$
$$= -\ln(x-1) + 2\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right] + \ln(x+1) - 2\left[\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right] + K =$$
$$= -\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + K =$$
$$= \ln\left[\frac{x+1}{x-1}\right] + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} + K = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{4}{x^2-1} + K.$$

□

Ejercicios 2.6.1 *Fracciones Parciales.* *Soluciones en la página 27*
Aplicar el método de Fracciones Parciales para calcular las siguientes integrales indefinidas y derivar para verificar cada resultado.

1. $\displaystyle\int \frac{x-12}{x^2+x-6}\,dx$;
2. $\displaystyle\int \frac{9x-40}{x^2-9x+20}\,dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{x^2-4}$;
4. $\displaystyle\int \frac{(x-3)^2\,dx}{(x-1)(x^2-1)}$;
5. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x-1}{x^3+x}\,dx$;
6. $\displaystyle\int \frac{6x^2-24x-54}{(x^2-9)^2}\,dx$;
7. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+8}{(x^2+4)^2}\,dx$;
8. $\displaystyle\int \frac{10\,dx}{4x^2-9}$;
9. $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+4x-4}{x^4-2x^3+2x^2}\,dx$;
10. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$;
11. $\displaystyle\int \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2 dx$;
12. $\displaystyle\int \frac{5x^2-4x+4}{x^4-8x^2+16}\,dx$;
13. $\displaystyle\int \frac{2x^4-x^3+4x^2+2}{x^2(x^2+1)^2}\,dx$;
14. $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x-1}{x^3+x^2}\,dx$;
15. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$;
16. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x-1}{x^4-1}\,dx$;
17. $\displaystyle\int \frac{4x-8}{x^4+4x^2}\,dx$;
18. $\displaystyle\int \frac{3x^2-8x+36}{x^4-16}\,dx$.

2.6.7 Apéndice

Deducción de la fórmula recursiva para $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}}$.

▼

$$\int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} = \int \frac{(u^2+\lambda^2)}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}}\,du = \int \frac{u^2\,du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} + \int \frac{\lambda^2\,du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{\lambda^2\,du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} - \int \frac{u^2\,du}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \int \frac{du}{(u^2+\lambda^2)^m} - \int u\cdot\left(u^2+\lambda^2\right)^{-m-1} u\,du.$$

Aplicamos integración por partes para calcular la última integral; seleccionando

$$w = u \;\&\; dv = \left(u^2+\lambda^2\right)^{-m-1} u\,du,$$

se obtienen

$$dw = du \;\&\; v = \int \left(u^2+\lambda^2\right)^{-m-1} u\,du = \frac{1}{2}\frac{\left(u^2+\lambda^2\right)^{-m}}{-m} = \frac{-1}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m}.$$

Al sustituir en la igualdad de integrales:

$$\begin{aligned}\int \frac{\lambda^2\,\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m} - \left[wv - \int v\,\mathrm{d}w\right] = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m} - wv + \int v\,\mathrm{d}w = \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m} - u\left[\frac{-1}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m}\right] + \int \frac{-1}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m}\,\mathrm{d}u = \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m} + \frac{u}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m} - \frac{1}{2m}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m} = \\ &= \frac{u}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m} + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\lambda^2 \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \frac{u}{2m\,(u^2+\lambda^2)^m} + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^{m+1}} = \frac{1}{\lambda^2}\left[\left(\frac{1}{2m}\right)\frac{u}{(u^2+\lambda^2)^m} + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\lambda^2)^m}\right].$$

□

Ejercicios 2.6.1 *Fracciones Parciales. Preguntas, página 25*

1. $\ln\left[\dfrac{K(x+3)^3}{(x-2)^3}\right]$.
2. $\ln\left[K(x-4)^4(x-5)^5\right]$.
3. $\ln\left[\dfrac{K(x-2)}{(x+2)}\right]$.
4. $\ln\left[\dfrac{(x+1)^4}{(x-1)^3}\right]-\dfrac{2}{x-1}+K$.
5. $-\ln x+\dfrac{3}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+K$.
6. $\ln\left[\dfrac{x-3}{x+3}\right]+\dfrac{12}{x^2-9}+K$.
7. $\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{x^2+4}+K$.
8. $\ln\left[\dfrac{K(2x-3)}{2x+3)}\right]$.
9. $\dfrac{2}{x}+\ln\left[\sqrt{x^2-2x+2}\right]$.
10. $\ln\left[K(x^2+2x-3)\right]-\dfrac{1}{x-1}$.
11. $\arctan x+\dfrac{1}{x^2+1}+K$.
12. $\ln\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}-\dfrac{3x-2}{x^2-4}+K$.
13. $-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2(x^2+1)}+K$.
14. $\ln\left[Kx^3(x-1)\right]+\dfrac{1}{x}$.
15. $\ln\left[\dfrac{K(x-1)}{\sqrt{x^2+4}}\right]-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}$.
16. $\ln\left[\dfrac{K(x^2+1)}{x^2-1}\right]+\arctan x$.
17. $\ln\left[\dfrac{Kx}{\sqrt{x^2+4}}\right]+\dfrac{2}{x}+\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
18. $\ln\left[\dfrac{K(x-2)\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^2}\right]-\dfrac{3}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.