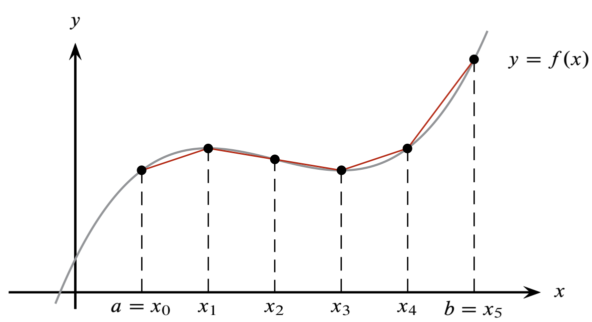
CAPÍTULO

1

Aplicaciones de la integral

3.4 Longitud de curvas

Entre los problemas que dieron origen a la integral, mencionamos en el capítulo I el de calcular la longitud de una curva, dada como la gráfica de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$.



Para aproximar el valor de la longitud de la curva, tomamos una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Después con los puntos $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$, $\ldots$, $[x_n, f(x_n)]$ se traza una línea poligonal cuya longitud se calcula como la suma de longitudes de los segmentos desde $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ hasta $[x_i, f(x_i)]$ en donde $i = 1, 2, \ldots, n$ y se suman dichas longitudes como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right]^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x_i. \tag{3.1}$$

canek.azc.uam.mx: 20/ 5/ 2015/639

En esta última suma $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; x_i^* denota un punto del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para el cual se cumple el teorema del Valor Medio para derivadas, es decir:

$$f'(x_i^*) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Es preciso subrayar que la función $f(x)$, de la que deseamos calcular la longitud de curva, debe tener derivada continua en (a, b).
Como vemos, la suma en (3.1) es una suma de Riemann que aproxima la siguiente integral:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

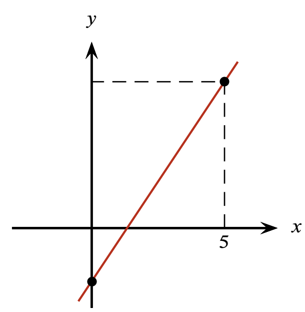
En conclusión:

- Si $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ con derivada continua en (a, b), entonces la longitud de la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es

$$L(f, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.4.1 *Si* $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 2$, *calcular la longitud de* $y = f(x)$ *en el intervalo* $[0, 5]$.

▼ La función $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 2$ es claramente continua en el intervalo y su derivada $f'(x) = \dfrac{3}{2}$ también. Por lo tanto:



$$L(f, [0, 5]) = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{13}{4}} \int_0^5 \mathrm{d}x = \frac{5\sqrt{13}}{2}.$$

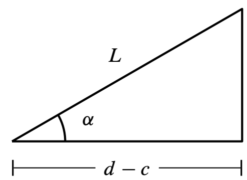
□

Ejemplo 3.4.2 *Si* $f(x) = mx + b$, *calcular la longitud de* $y = f(x)$ *en el intervalo* $[c, d]$.

▼ Si $f(x) = mx + b$ es continua, tiene por gráfica una recta; su derivada es $f'(x) = m$, también continua en cualquier intervalo, por lo tanto:

$$L(f, [c, d]) = \int_c^d \sqrt{1 + m^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{1 + m^2} \int_c^d \mathrm{d}x = \sqrt{1 + m^2}(d - c).$$

Observe que $d - c$ es la longitud del cateto horizontal en el triángulo que se muestra. Si θ denota el ángulo de inclinación de la recta, entonces:



$$\frac{L}{d-c} = \sec\theta, \text{ o bien } L = (d-c)\sec\theta.$$

En la ecuación de la recta $y = mx + b$, la pendiente m es precisamente la tangente del ángulo de inclinación, $m = \tan\theta$; por una identidad trigonométrica conocida:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \;\Rightarrow\; \sqrt{1+m^2} = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|\,,$$

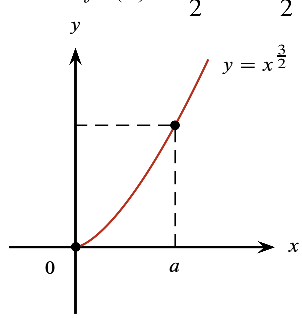
así que la longitud obtenida con la integral concuerda con esta observación:

$$L(f, [c, d]) = \sqrt{1+m^2}(d-c) = (d-c)\sec\theta.$$

□

Ejemplo 3.4.3 *Para la función $y = x^{\frac{3}{2}}$ determine la longitud de curva desde 0 hasta $x = a > 0$.*

▼ Observe que la curva no está definida para valores negativos de x, pues $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$, pero es la gráfica de una función continua en $[0, a]$ cuya derivada $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ es también continua en $[0, a]$.



Por la fórmula (3.2) obtenemos:

$$L(f, [0, a]) = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \underbrace{\int_0^a \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx}_{\boxed{\begin{array}{ll} u = 1 + \frac{9x}{4}; & du = \frac{9}{4}\, dx; \\ x = \frac{4}{9}(u-1); & dx = \frac{4}{9}\, du. \end{array}}} =$$

$$= \int_1^{1+\frac{9a}{4}} \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9}\, du = \frac{4}{9}\int_1^{1+\frac{9a}{4}} u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{4}{9}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{1+\frac{9a}{4}} = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9a}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

□

Ejemplo 3.4.4 *Calcular la longitud del arco de curva $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, desde $x = 1$ hasta $x = 3$.*

▼ La función $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ tiene la derivada $f'(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2}(x^2 - x^{-2})$, que es claramente continua en el intervalo $[1, 3]$, por lo que podemos usar la fórmula (3.2) para obtener la longitud de arco deseada. Primero,

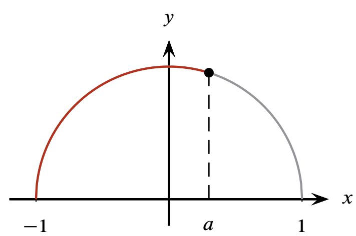
$$1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \left[\frac{1}{2}(x^2 - x^{-2})\right]^2 = 1 + \frac{1}{4}(x^2 - x^{-2})^2 = 1 + \frac{1}{4}(x^4 - 2x^2x^{-2} + x^{-4}) =$$
$$= \frac{4 + x^4 - 2 + x^{-4}}{4} = \frac{x^4 + 2 + x^{-4}}{4} = \frac{x^4 + 2x^2x^{-2} + x^{-4}}{4} = \frac{(x^2 + x^{-2})^2}{4};$$

Por lo tanto la longitud es

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \sqrt{\frac{(x^2 + x^{-2})^2}{4}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{x^2 + x^{-2}}{2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^3}{3} - 3^{-1}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^{-1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[9 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(10 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{28}{3} = \frac{14}{3}.$$

□

Ejemplo 3.4.5 *La función $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ tiene por gráfica el semicírculo superior de radio 1 con centro en el origen, y está definida para $-1 \le x \le 1$.*



Calcular la longitud de esta curva.

▼ La función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua en todo el intervalo $[-1, 1]$. Su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

que es continua en $(-1, 1)$. Podemos entonces aplicar la fórmula (3.2) para el intervalo $[-1, 1]$:

$$L(f, [-1, 1]) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - x^2 + x^2}{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Calculamos esta integral impropia dando un $\epsilon > 0$ e integrando en el intervalo $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$.

$$\int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x\,\Big|_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} = \operatorname{arcsen}(1 - \epsilon) - \operatorname{arcsen}(-1 + \epsilon) = g(\epsilon).$$

Cuando $\epsilon \to 0^+$ sucede:

$$\begin{cases} 1 - \epsilon \to 1^- & \Rightarrow \operatorname{arcsen}(1 - \epsilon) \to \operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}; \\ -1 + \epsilon \to -1^+ & \Rightarrow \operatorname{arcsen}(-1 + \epsilon) \to \operatorname{arcsen} -1 = -\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

Luego entonces,

$$\lim_{\epsilon\to 0+} g(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0+} [\operatorname{arcsen}(1-\epsilon) - \operatorname{arcsen}(-1+\epsilon)] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{\text{converge a}} \pi \;\Rightarrow$$

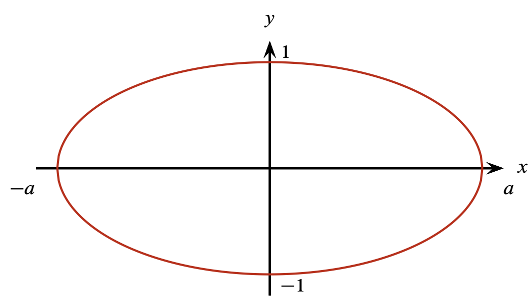
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Por lo tanto, la longitud de la semicircunferencia $y = \sqrt{1-x^2}$ con $-1 \le x \le 1$ es

$$L(f, [-1, 1]) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

□

Ejemplo 3.4.6 *Para la elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$, *escribir la fórmula para encontrar la longitud de la porción de la curva entre* $x = c$ *&* $x = d$, *donde* $-a \le c < d \le a$.



▼

Como necesitamos una función $y = f(x)$, despejaremos de la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \;\Rightarrow\; y^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2} \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

Podemos tomar la raíz positiva para tener una función, pues el análisis para la raíz negativa es similar. Por lo tanto

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

es continua en $[-a, a]$ y cuya derivada es

$$f'(x) = \frac{-x}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

que es continua en $(-a, a)$. De aquí:

$$1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^2(a^2-x^2)+x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^4 - a^2x^2 + x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^4 + (1-a^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}.$$

Entonces,

$$L(f; [c, d]) = \int_c^d \sqrt{\frac{a^4 + (1-a^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_c^d \sqrt{\frac{a^4 + (1-a^2)x^2}{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Esta integral, que no puede ser evaluada por métodos elementales, pertenece a la clase de *integrales elípticas*.

□

Ejercicios 3.4.1 *Longitud de arco.* *Soluciones en la página 7*

1. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \dfrac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}$, desde $x = \sqrt{2}$ hasta $x = \sqrt{7}$.
2. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$, desde $x = 1$ hasta $x = 4$.
3. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$, desde $x = 1$ hasta $x = 3$.
4. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{1}{8x^2}$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.
5. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \dfrac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} - \dfrac{5}{8}x^{\frac{4}{5}}$, desde $x = 1$ hasta $x = 32$.
6. Calcular la longitud de arco de la curva $9y^2 = 4\left(1+x^2\right)^3$, en el primer cuadrante, desde el punto $x = 0$ hasta el punto $x = 2\sqrt{2}$.
7. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \dfrac{5}{48}\left(4x^{\frac{4}{5}}+1\right)^{\frac{3}{2}}$, desde $x = \dfrac{1}{32}$ hasta $x = 1$.
8. Determinar la longitud de arco de la curva $f(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t+1+\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$, con $1 \leq x \leq 4$.
9. Determinar la longitud de arco de la curva $y = \dfrac{x^5}{10} + \dfrac{1}{6x^3}$, con $1 \leq x \leq 2$.

Ejercicios 3.4.1 *Longitud de arco.* *Preguntas, página 6*

1. $\dfrac{10\sqrt{7}}{3} - \dfrac{5\sqrt{2}}{3}u.$
2. $\dfrac{31}{6}u.$
3. $\dfrac{53}{6}u.$
4. $\dfrac{123}{32}u.$
5. $\dfrac{25}{48}\sqrt{5}\left(-1 + 13\sqrt{13}\right)u.$
6. $\dfrac{38\sqrt{2}}{3}u.$
7. $\dfrac{45}{32}u.$
8. $\dfrac{20}{3}u.$
9. $\dfrac{779}{240}u.$