CAPÍTULO

3

Aplicaciones de la integral

3.5 Trabajo de una fuerza

Se dice que una fuerza realiza un trabajo cuando cambia el estado de reposo o estado de movimiento de un cuerpo. En este sentido, el trabajo que realiza una fuerza para llevar a cabo una tarea, comúnmente denotado por la letra W, representa la energía necesaria para realizarla. El trabajo representa la cantidad total de esfuerzo necesario para realizar alguna tarea.
Este apartado trata sobre el trabajo que realiza una fuerza constante como, por ejemplo, la fuerza para mover hacia arriba un objeto o la fuerza para deslizarlo. Tambien trata sobre el trabajo que realiza una fuerza variable, como la fuerza que permite comprimir o estirar un resorte, y el trabajo que se realiza para extraer el fluido de un tanque.

3.5.1 Trabajo realizado por una fuerza constante

Si se desea levantar un objeto desde el piso hasta una altura h, se requiere de una fuerza F cuya magnitud es el peso del objeto. Para diferentes alturas, la fuerza que se requiere es la misma, es decir, la fuerza es constante.
Por definición, si un objeto es desplazado una distancia D en la dirección de una fuerza constante aplicada F entonces el trabajo W realizado por la fuerza se define:

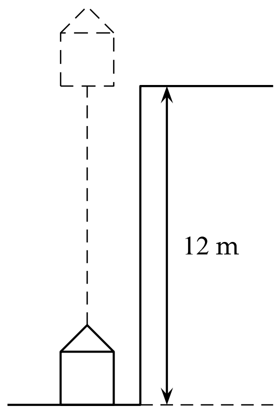
$$W = FD.$$

Cuando la fuerza F y la distancia D se expresan en newtons (N) y metros (m), respectivamente, la unidad del trabajo W es el newton-metro y se llama joule (J).
Cuando la fuerza F se expresa en libras y la distancia D en pies, la unidad del trabajo W es la libre-pie.

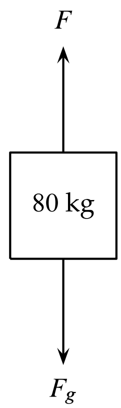
$$1 \text{ libra-pie } \approx 1.36 \text{ J}$$

Ejemplo 3.5.1 *¿Cuál es el trabajo que realiza una fuerza al levantar una caja de* 80 *kg de masa desde el nivel del piso hasta la parte superior de un edificio que tiene* 12 *m de altura?*

canek.azc.uam.mx: 20/ 5/ 2015/ 641



▼ La fuerza F que se requiere para levantar la caja es exactamente igual, en magnitud y dirección, a la fuerza de atracción gravitacional F_g que actúa sobre esta, pero con sentido opuesto



Esto es

$$F = F_g = mg = (80 \text{ kg}) \left(9.8 \text{ m/s}^2\right) = 784 \text{ N}.$$

El trabajo W que realiza la fuerza F al levantar la caja una distancia $D = 12$ m es

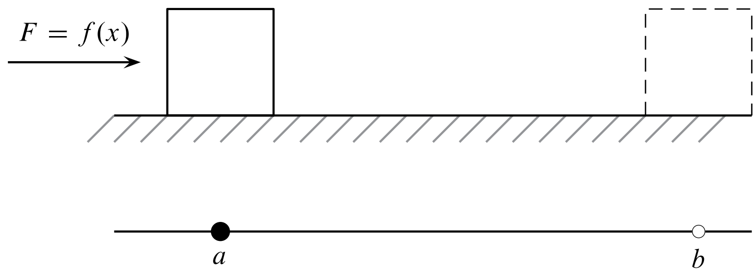
$$W = FD = (784 \text{ N})(12 \text{ m}) = 9\,408 \text{ J} = 9.408 \text{ kJ};$$

9.408 kJ representa la energía necesaria para realizar dicha tarea. □

3.5.2 Trabajo realizado por una fuerza variable

Consideremos que sobre un cuerpo, apoyado en una superficie horizontal, actúa una fuerza continua y variable llamada $f(x)$, provocando que dicho cuerpo se desplace en línea recta.

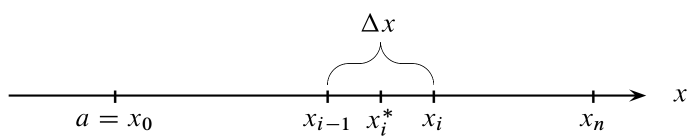
Como se puede observar en la parte inferior de la siguiente figura, el cuerpo está representado por un punto en una recta horizontal x y se desplaza desde a hasta b.



Para calcular el trabajo que realiza la fuerza $f(x)$ al desplazar el cuerpo, no se puede emplear la expresión $W = FD$ descrita anteriormente ya que, en este caso, para cada punto en el intervalo $[a, b]$, $F = f(x)$ es variable.
¿Cómo se puede calcular el trabajo que realiza la fuerza continua y variable $f(x)$?
Para contestar a esta pregunta es necesario realizar el análisis que se muestra a continuación.
Se divide el intervalo $[a, b]$ en n-subintervalos, todos ellos con la misma longitud Δx, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

En la siguiente figura se muestra el i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
x_i^* es un punto cualquiera en dicho intervalo y la fuerza sobre el cuerpo en ese punto es $f(x_i^*)$.



Observación. Si el número de subintervalos tiende a ser muy grande, entonces Δx tiende a ser muy pequeña. En este caso los valores de x_{i-1} y x_i se encontrarían muy cerca uno del otro, por lo que el valor de $f(x_i^*)$ en $[x_{i-1}, x_i]$ no variaría mucho. Se puede decir que $f(x_i^*)$ sería casi constante en dicho intervalo.
Considerando lo anterior, el trabajo W_i que realiza la fuerza $f(x_i^*)$ al mover el objeto desde x_{i-1} hasta x_i es, aproximadamente:

$$W_i \approx f(x_i^*)\Delta x.$$

Por otra parte, considerando los n subintervalos en $[a, b]$ se puede decir que el trabajo W que realiza la fuerza $F = f(x)$ al mover el objeto desde a hasta b es, aproximadamente:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

La aproximación de W se mejora cuando el número de subintervalos n tiende a ser muy grande, es decir,

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Observación: de esta última igualdad aparece una suma de Riemann. Y como vimos en el capítulo I:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x; \tag{3.1}$$

que representa el trabajo realizado por la fuerza $f(x)$ al mover el objeto desde el punto a hasta el punto b.

Ejemplo 3.5.2 *En la siguiente figura se encuentra un cuerpo en reposo sobre una superficie plana. Debido a la acción de una fuerza variable y continua $F = f(x) = x^3 + 1$, cuya magnitud está dada en newtons, el cuerpo se desplaza en línea recta desde la posición a hasta la posición b. Considerando que no existe fuerza de rozamiento entre la superficie y el cuerpo, y que la fuerza actúa en el sentido de movimiento de este, ¿cuál es el trabajo que realiza la fuerza $f(x)$ para desplazar el cuerpo?*

▼ En este ejercicio la fuerza $F = f(x) = x^3 + 1$ provoca que el cuerpo se desplace desde $a = 0$ m hasta $b = 5$ m, es decir, una distancia de 5 m.
Considerando la definición del trabajo W (3.1) realizado por una fuerza variable $f(x)$, y usando la información de este ejercicio:

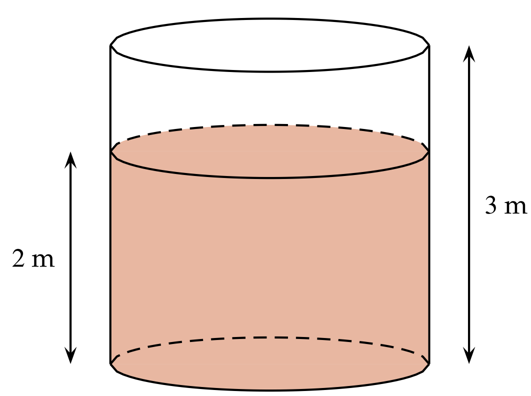
$$W = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow W = \int_0^5 (x^3 + 1)\,\mathrm{d}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_0^5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W = \frac{(5)^4}{4} + 5 = \frac{645}{4}.$$

Las unidades de la fuerza que actúa sobre el cuerpo y la distancia que este se desplaza son newtons y metros respectivamente, entonces el trabajo W realizado por la fuerza F es de $\dfrac{645}{4}$ joules (J) $= 161.25$ J.

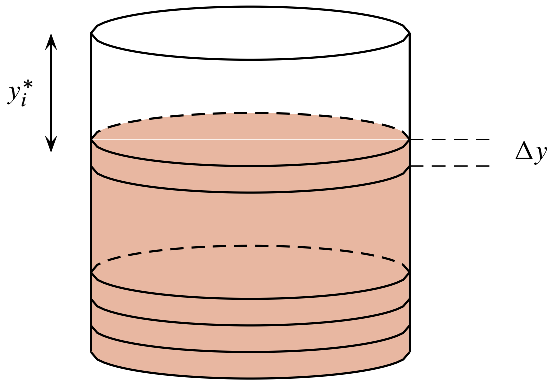
□

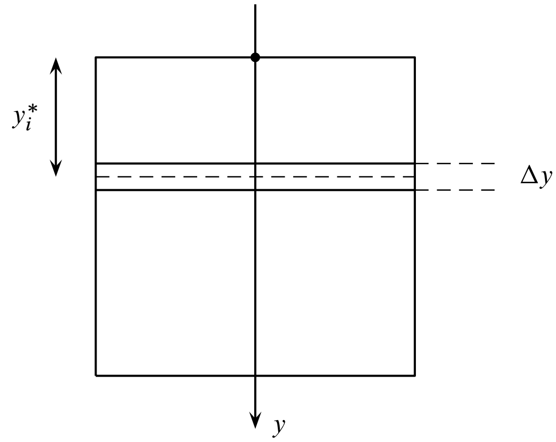
3.5.3 Trabajo realizado para extraer el fluido de un tanque

Ejemplo 3.5.3 *Un recipiente cilindrico con base circular que contiene agua tiene un radio y una altura de 1 y 3 metros respectivamente. Si el agua en el interior del recipiente tiene una altura de 2 metros, ¿cuál es el trabajo requerido para bombear toda el agua hasta la parte superior del recipiente? (Considere que la densidad del agua es 1 000 kg/m^3)*



▼ Para resolver este ejercicio tendremos en cuenta un conjunto de n capas de líquido, cada una con una misma altura Δy, como se muestra en la siguiente figura en la cuál se resalta la i-ésima capa de líquido a una distancia y_i^* con respecto de la parte superior del recipiente. Observe que el eje vertical coordenado y tiene su origen en la parte superior del recipiente y el sentido positivo hacia abajo.





Si el número de capas tiende a ser muy grande, entonces Δy de cada capa tiende a ser muy pequeña. En este caso el trabajo W_i que realiza la fuerza F_i al elevar hasta la parte superior del recipiente la i-ésima capa es

$$W_i = F_i y_i^*.$$

La fuerza F_i debe ser igual a la fuerza de atracción gravitacional que actúa sobre la i-ésima capa, esto es:

$$F_i = m_i g;$$

donde

$$m_i = (\text{densidad del líquido})\,(\text{volumen de la } i\text{-ésima capa}) \quad \& \quad g = \text{aceleración de la gravedad}.$$

Considerando que el radio de la i-ésima capa es igual al radio del recipiente, el cálculo de m_i es

$$m_i = (1\,000)(\pi r^2 \Delta y) \Rightarrow m_i = (1\,000)(\pi (1)^2 \Delta y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_i = 1\,000\pi \Delta y.$$

Por otra parte

$$F_i = m_i g = (1\,000\pi\Delta y)(9.8) \Rightarrow F_i = 9\,800\pi\Delta y.$$

Con lo anterior

$$W_i = F_i(y_i^*) \Rightarrow W_i = 9\,800\pi(y_i^*)\Delta y.$$

El trabajo total que se requiere para elevar a la parte superior del recipiente todo el líquido, es decir, las n capas, es aproximadamente

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i \Rightarrow W \approx \sum_{i=1}^{n} F_i y_i^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W \approx \sum_{i=1}^{n} 9\,800\pi(y_i^*)\Delta y.$$

La aproximación de W se mejora cuando el número n de capas tiende a ser muy grande, es decir,

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 9\,800\pi(y_i^*)\Delta y.$$

En el lado derecho de esta última expresión se tiene una suma de Riemann. Recordando lo visto en el capítulo I:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 9\,800\pi(y_i^*)\Delta y \Rightarrow W = \int_1^3 9\,800\pi y \Delta y.$$

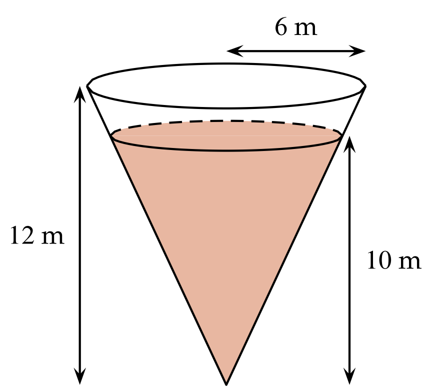
En el eje coordenado y, la altura del nivel del líquido está en 1 y la base del recipiente está en 3. Es por esto por lo que el límite de integración inferior es 1 y el superior es 3. Resolviendo la integral:

$$\int_1^3 9\,800\pi\, y\Delta y = 9\,800\pi \int_1^3 y\Delta y = 9\,800\pi\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_1^3\right) = 9\,800\pi\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right) =$$
$$= 9\,800\cdot\pi\cdot 4 = 39\,200\pi \approx 123.15\ \text{kJ}.$$

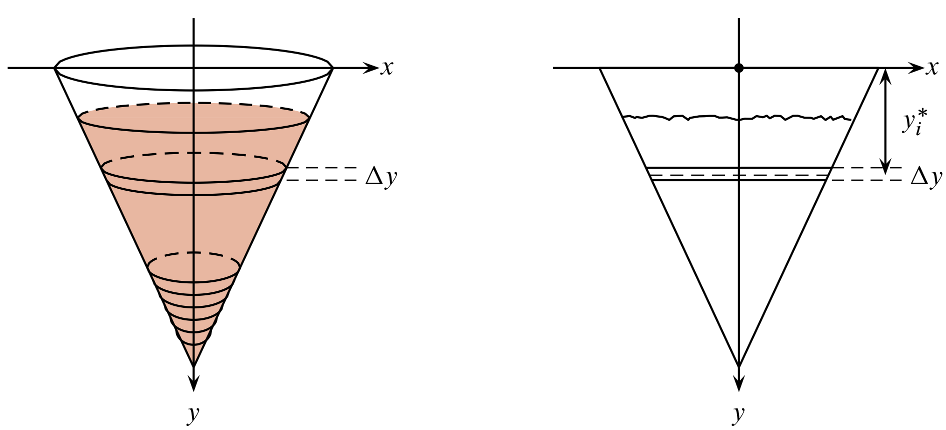
□

En el ejemplo anterior, cada una de las capas de líquido consideradas, con una misma altura Δy, tiene un mismo volumen por las características del recipiente que las contiene.
Ahora, el siguiente ejemplo presenta un recipiente con características diferentes, cada una de las capas consideradas tiene un volumen diferente.

Ejemplo 3.5.4 *El cono circular de la siguiente figura almacena agua. La altura del cono es de* 12 *m y su radio de la parte superior es de* 6 *m.*
El nivel del líquido contenido por el recipiente tiene una altura de 10 *m. ¿Cuál es el trabajo que se requiere para bombear todo el líquido hasta la parte superior del cono? (Densidad del agua:* 1 000 *kg/m*^{3}*).*



▼ Al igual que en el ejercicio anterior se considerará un conjunto de n capas de líquido, cada una con una misma altura Δy.
También, se considerará que el origen del eje vertical coordenado y está en la parte superior del recipiente, como se puede observar en la siguiente figura, con el sentido positivo hacia abajo.



Si el número de capas tiende a ser muy grande, la altura Δy de estas tenderá a ser muy pequeña; por lo que el trabajo W_i que realiza la fuerza F_i al elevar la i-ésima capa hasta la parte superior del cono circular es

$$W_i = F_i\, y_i^*;$$

donde

$$F_i = \text{(fuerza de atracción gravitacional sobre la } i\text{-ésima capa}=m_i g.$$

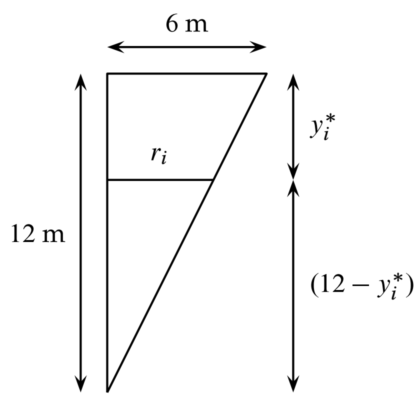
Además, la masa m_i de la i-ésima capa es

$$\begin{aligned} m_i &= \text{(densidad del líquido)(volumen de la } i\text{-ésima capa)} \;\; \& \\ g &= \text{aceleración de la gravedad.} \end{aligned}$$

Dado que la altura Δy de cada capa es muy pequeña, se aproximará el volumen V_i de la i-ésima capa como si fuera el de un cilindro circular con radio r_i, es decir,

$$V_i = \pi (r_i)^2 \Delta y.$$

A partir de los triángulos semejantes de la siguiente figura



tenemos:

$$\frac{6}{12} = \frac{r_i}{(12 - y_i^*)} \;\Rightarrow\; \frac{6(12 - y_i^*)}{12} = r_i \;\Rightarrow\; r_i = \frac{12 - y_i^*}{2}.$$

Sustituyendo r_i en $V_i = \pi(r_i)^2 \Delta y$ se obtiene lo siguiente:

$$V_i = \pi \left(\frac{12 - y_i^*}{2} \right)^2 \Delta y.$$

Con lo anterior, la masa de la i-ésima capa es

$$\begin{aligned} m_i &= \text{(densidad del líquido) (volumen de la } i\text{-ésima capa)} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; m_i &= (1\,000) \left(\pi \left(\frac{12 - y_i^*}{2} \right)^2 \Delta y \right) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; m_i &= 250\pi (12 - y_i^*)^2 \Delta y. \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} F_i &= m_i g = (250\pi(12 - y_i^*)^2 \Delta y) 9.8 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; F_i &= 2\,450\pi(12 - y_i^*)^2 \Delta y. \end{aligned}$$

Con esto:

$$\begin{aligned} W_i &= F_i(y_i^*) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; W_i &= 2\,450\pi(12 - y_i^*)^2 y_i^* \Delta y. \end{aligned}$$

Al igual que en el problema anterior, el trabajo total W que se requiere para elevar las n capas del líquido, a la parte superior del recipiente, es:

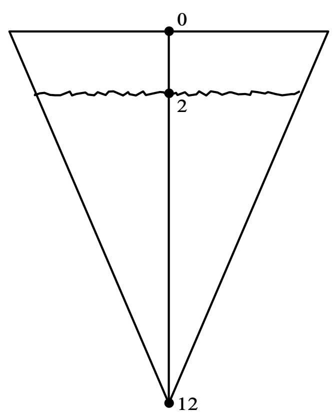
$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^{n} W_i \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ W &\approx \sum_{i=1}^{n} F_i\, y_i^* \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ W &\approx \sum_{i=1}^{n} 2\,450\pi(12 - y_i^*)^2 y_i^*\,\Delta y. \end{aligned}$$

Esta aproximación se mejora cuando el número n de capas tiende a ser muy grande, es decir,

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\,450\pi(12 - y_i^*)^2 y_i^*\,\Delta y.$$

Y considerando que el lado derecho de esta última expresión es una suma de Riemann, entonces:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\,450\pi(12 - y_i^*)^2 y_i^*\,\Delta y \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ W &= \int_{2}^{12} 2\,450\pi(12 - y)^2 y\Delta y. \end{aligned}$$



La solución de esta última integral es

$$\begin{aligned} \int_{2}^{12} 2\,450\pi(12 - y)^2 y\Delta y &= 2\,450\pi \int_{2}^{12} (12 - y)^2 y\Delta y = \\ &= 2\,450\pi \int_{2}^{12} (144y - 24y^2 + y^3)\Delta y = \\ &= 2\,450\pi \left[72y^2 - 8y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_2^{12} = \\ &= 2\,450\pi \left[\left(72(12)^2 - 8(12)^3 + \frac{(12)^4}{4}\right) - \left(72(2)^2 - 8(2)^3 + \frac{(2)^4}{4}\right)\right] = \\ &= 2\,450\pi[(10\,368 - 13\,824 + 5\,184) - (288 - 64 + 4)] = \\ &= 11\,545\,353\,\mathrm{J} \ \approx 11.5454\,\mathrm{M\,J}. \end{aligned}$$

Este es el trabajo que se requiere para bombear todo el líquido hasta la parte superior del cono.

□

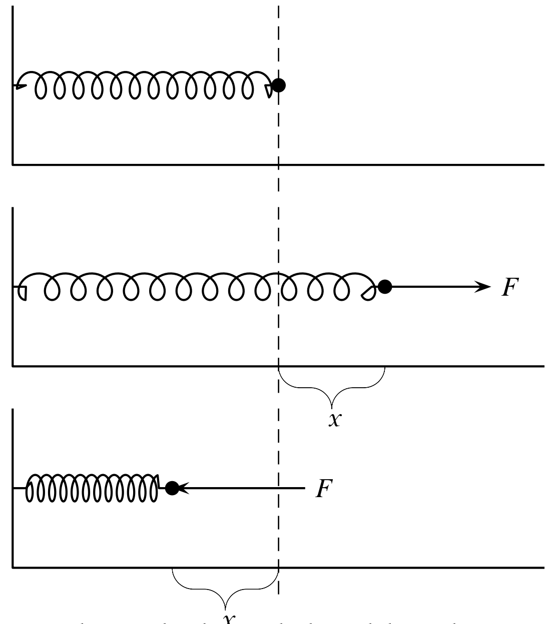
3.5.4 Trabajo realizado para comprimir o alargar un resorte

Para la ingeniería es importante conocer el trabajo que realiza una fuerza, bien al comprimir o bien al alargar un resorte.

Resorte con longitud natural

Resorte alargado una longitud x por la acción de una fuerza F

Resorte comprimido una longitud x por la acción de una fuerza F

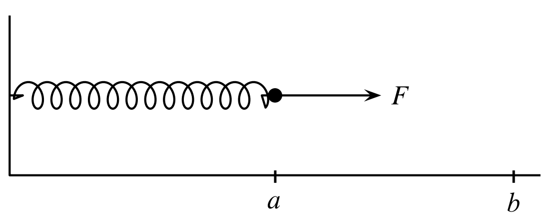


Si se desea alargar un resorte una longitud x sin llegar a su límite de elasticidad, se debe aplicar una fuerza F directamente proporcional a la longitud x, es decir,

$$F = kx,$$

donde k es la constante del resorte cuyas unidades en el Sistema Internacional (SI) son N/m.
Además, la fuerza que se requiere para comprimir un resorte es directamente proporcional a la longitud que se comprime o encoge.
Tanto para el alargamiento como para el encogimiento de un resorte, la expresión $F = kx$ representa la ley de Hooke.
En cada contexto, dependiendo del sistema de referencia que se escoja, la fuerza F que modifica la longitud natural de un resorte tendrá un sentido positivo o negativo.

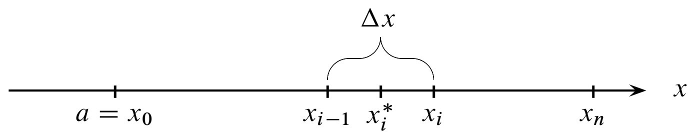
Ejemplo 3.5.5 *Un extremo de un resorte se encuentra sujeto a una pared, tal como se muestra en la siguiente figura.*



Se requiere estirar el resorte desde su estado natural cuya longitud es a hasta b, aplicando la fuerza F en el extremo derecho de éste. ¿Cuál es el trabajo W que realiza la fuerza F para el alargamiento del resorte?

▼ Para obtener la expresión que permita calcular el trabajo W que realiza la fuerza F se procede de la siguiente manera:
Se divide el intervalo $[a, b]$ en n-subintervalos, todos ellos con la misma longitud Δx. Desde luego, considerando que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$



En la recta anterior, x_i^* es un punto cualquiera en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y la fuerza que se requiere para alargar el resorte hasta x_i^* es $f(x_i^*)$.
Los valores de x_{i-1} y x_i se encontrarían muy cerca uno del otro si Δx es muy pequeña. Esto se lograría si el número de subintervalos tiende a ser muy grande.
En este caso $f(x_i^*)$ en $[x_{i-1}, x_i]$ no varía mucho y se podría decir que $f(x_i^*)$ es casi constante. Entonces, el trabajo W_i que realiza la fuerza $f(x_i^*)$ para alargar el resorte desde x_{i-1} hasta x_i es, aproximadamente:

$$W_i \approx f(x_i^*)\Delta x.$$

Considerando los n sub-intervalos en $[a, b]$, el trabajo W que realiza la fuerza F al estirar el resorte desde a hasta b es, aproximadamente:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Si el número de sub-intervalos n tiende a ser muy grande, entonces:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Tal como se ha explicado anteriormente:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

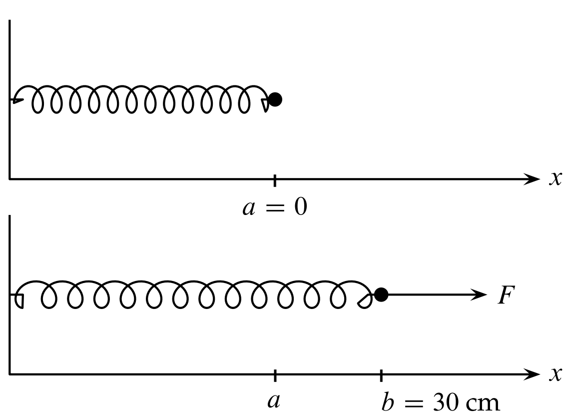
donde la fuerza para alargar el resorte $f(x) = kx$, por lo que el trabajo es

$$W = \int_a^b kx\,\mathrm{d}x.$$

□

Ejemplo 3.5.6 *Un resorte se encuentra sujeto a una pared por uno de sus extremos. La constante k del resorte es de 8.3 N/cm. ¿Cuál es el trabajo que realiza una fuerza F para alargar el resorte 30 cm?*

▼ Como se puede apreciar en la siguiente figura, la fuerza F alarga el resorte desde $a = 0$ hasta $b = 30$ cm:



El trabajo está dado por la expresión

$$W = \int_a^b kx \, \mathrm{d}x.$$

Evaluando la integral:

$$\int_a^b kx \, \mathrm{d}x = \int_0^{30} (8.3)x \, \mathrm{d}x = (8.3)\frac{x^2}{2}\Big|_0^{30} = \left(\frac{8.3}{2}\right)(30^2 - 0^2) =$$
$$= 3\,735 \text{ Ncm} = 37.35 \text{ Nm} = 37.35 \text{ J},$$

que representa el trabajo que realiza la fuerza F para estirar el resorte 30 cm.

□

Ejemplo 3.5.7 *Un resorte con una longiutd natural de* 8 *cm se encuentra suspendido por uno de sus extremos. Al aplicar una fuerza* $F = 45$ N *el resorte se alarga* 3 *cm. ¿Cuál es la energía necesaria (trabajo) para estirar el resorte* 3 *cm más?*

▼ Se sabe que la fuerza para alargar o bien para comprimir un resorte una longitud x, sin llegar a su límite de elasticidad, es directamente proporcional a dicha longitud. Esto es:

$$F = f(x) = kx,$$

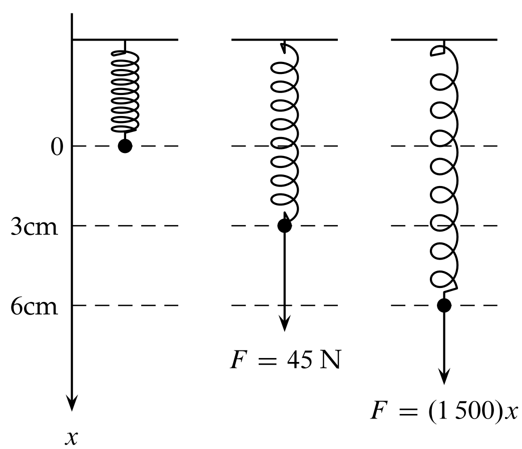
donde k es la constante del resorte. Por la información del problema

$$F = kx \;\Rightarrow\; 45 = k(0.03) \;\Rightarrow\; k = \frac{45}{0.03} = 1\,500 \text{ N/m}.$$

Con lo anterior, la fuerza necesaria para estirar el resorte una longitud x es

$$F = f(x) = kx = (1\,500)x.$$

En la siguiente figura se muestra el resorte en tres momentos diferentes: con su longitud natural, estirado 3 cm y estirado 6 cm:



Si el trabajo que realiza una fuerza para estirar el resorte desde a hasta b es

$$\int_a^b (1\,500)x \, \mathrm{d}x,$$

entonces:

$$\int_{0.03}^{0.06} (1\,500)(x) \, \mathrm{d}x$$

representa la expresión para calcular el trabajo que realiza la fuerza para estirar el resorte desde 3 cm hasta 6 cm, es decir, 3 cm más.
El procedimiento de la evaluación de la integral es el siguiente:

$$\int_{0.03}^{0.06} (1\,500)x \, \mathrm{d}x = 1\,500 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.03}^{0.06} = \frac{1\,500}{2}[(0.06)^2 - (0.03)^2] =$$
$$= \frac{1\,500}{2}(0.0027) = 2.0250 \text{ J}.$$

□

Ejercicios 3.5.1 *Trabajo.* *Soluciones en la página 14*

1. Una masa de 3.5 kg suspendida de un resorte, lo alarga 4 cm. Si la longitud natural del resorte es de 25 cm, ¿cuál es el trabajo que realiza una fuerza para estirar el resorte 10 cm? Y ¿cuál es el trabajo para que el resorte, de su longitud natural de 25 cm llegue hasta 32 cm?

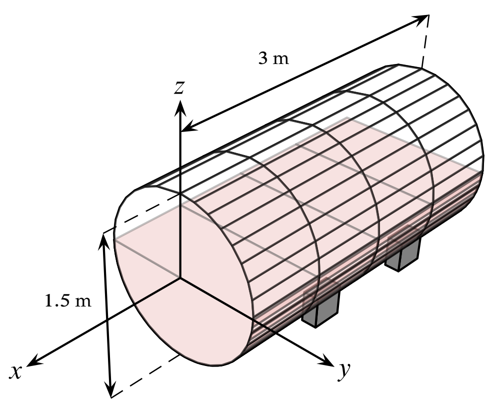
2. Con una fuerza de 30 N, se comprime un resorte 7 cm. ¿Cuál es el trabajo que realiza una fuerza para comprimir el resorte de su longitud natural de 80 cm a una longitud de 70 cm?

3. Cuando se aplica una fuerza de 8 N a un resorte, este se estira 50 cm. ¿Cuál es el trabajo que se realiza para estirar el resorte de su longitud natural de 3 m hasta 3.5 m? ¿Cuál es el trabajo de una fuerza que comprima el resorte 50 cm? Compare las respuestas.

4. La base circular de un recipiente cilíndrico tiene un radio de 75 cm. La altura del recipiente es de 2 m y este se encuentra lleno de agua. ¿Cuál es el trabajo de la fuerza necesaria para bombear el agua hasta una altura de 5 m con respecto a la base del recipiente?

5. Un cono circular recto invertido tiene 2 m de altura y en la parte superior el diámetro es de 1.5 m. Si el cono contiene agua y la altura de la superficie del líquido es de 1.8 m, ¿cuál es el trabajo para bombear el líquido hasta la parte superior del recipiente?

6. El recipiente que se muestra en la figura con forma de cilindro recto tiene 3 m de largo y 1.5 m de altura. Si la mitad del recipiente está lleno de agua, ¿cuál es el trabajo que realiza la fuerza para bombear el agua a la parte superior del recipiente?



7. Una cadena de 10 m de longitud pesa 20 kg/m y está extendida en el suelo. Calcular el trabajo que se requiere para levantar un extremo de la cadena a una altura de 10 m y quedar así totalmente extendida en el aire.

8. Una alpinista tiene que jalar 20 kg de equipaje que cuelgan verticalmente de una soga de 20 m, la cual pesa 0.2 kg/m. Calcular el trabajo que realizará la alpinista para subir el equipaje.

9. Un contenedor esférico cuyo radio tiene una longitud de 2 m, contiene agua de mar cuya densidad media aproximada es de 1 027 kg/m^3. Si la altura del nivel del líquido es de 3.5 m, ¿cuál es el trabajo para bombear el agua hasta la parte superior del tanque?

10. Un tanque con la forma de un paraboloide de revolución tiene 10 ft de altura y 4 ft de radio en la parte superior. Suponiendo que dicho tanque está lleno de aceite de oliva que pesa 57 lb/ft^3, calcular el trabajo que se requiere para bombear todo el aceite a la parte superior del contenedor y así vaciarlo por completo.

Ejercicios 3.5.1 *Trabajo.* *Preguntas, página 12*

1. 4.29 J, 4.20 J.
2. 2.14 J.
3. 2 J, 2 J.
4. 184.73 kJ.
5. 5.47 k J.
6. 65.78 kJ.
7. 1 000 J.
8. 4.312 kJ.
9. 669.76 kJ.
10. 4 000π lb–ft.