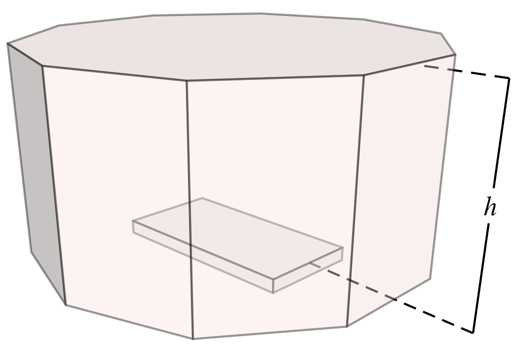
CAPÍTULO

1

Aplicaciones de la integral

3.6 Fuerza y presión de un fluido

Cuando en un fluido contenido por un recipiente se encuentra un cuerpo sumergido, este experimenta una fuerza, perpendicular a cualquiera de sus superficies, ejercida por el fluido.
En la siguiente figura se muestra una placa rectangular que se encuentra en el fondo de un recipiente con agua.



Considerar que el fluido y la placa rectangular se encuentran en reposo. Además, h es la distancia entre la parte superior de la placa y el nivel del fluido, con una densidad ρ (kilogramos por metros cúbicos). El área de la superficie superior de la placa es A (metros cuadrados).
La fuerza F que ejerce el fluido sobre la superficie superior de la placa es

$$F = mg, \tag{3.1}$$

donde m es la masa del fluido que está por arriba de dicha superficie y g es la aceleración debido a la gravedad.
La masa m y el volumen V del fluido que está por arriba de la placa, respectivamente están dados por:

$$m = \rho V, \tag{3.2}$$

canek.azc.uam.mx: 20/ 5/ 2015/ 645

$$V = Ah. \tag{3.3}$$

Considerando (3.2) y (3.3) en (3.1) se tiene lo siguiente:

$$F = mg \ \Rightarrow \ F = \rho V g \ \Rightarrow \ F = \rho A h g.$$

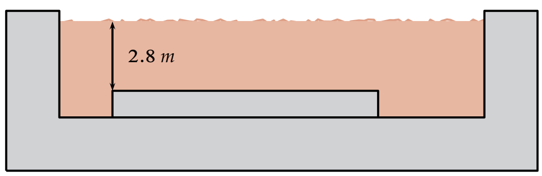
Mientras que $F = \rho A h g$ es la fuerza que ejerce el fluido sobre la superficie de la placa, la presión P sobre dicha superficie está definida como la fuerza F por unidad de área, es decir:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\rho A h g}{A} = \rho h g.$$

En el Sistema Internacional (SI) la unidad que se emplea para medir presión se llama pascal cuya abreviatura es Pa y su equivalencia es

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2.$$

Ejemplo 3.6.1 *Una placa rectangular de* 1 *m de ancho y* 2 *m de largo se encuentra sumergida horizontalmente en el fondo de un contenedor que almacena agua. El lado de la parte superior de la placa se encuentra a* 2.8 *metros del nivel del agua. Encontrar la fuerza y presión del fluido sobre dicho lado. La densidad del agua es* $\rho = 1\,000$ *kg/m*^{3}.



▼ La fuerza que ejerce el fluido sobre la superficie superior de la placa es

$$F = \rho A h g.$$

En este problema los datos son

$$\begin{aligned} \rho &= 1\,000 \text{ kg/m}^3; \\ h &= 2.8 \text{ m}; \\ g &= 9.8 \text{ m/s}^2; \\ A &= (1 \text{ m})\,(2 \text{ m}) = 2 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Por lo que la fuerza F del fluido sobre el lado de la parte superior de la placa es

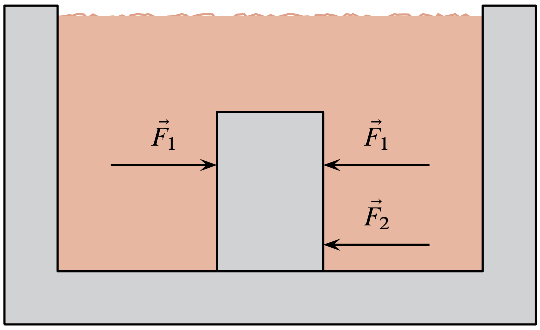
$$\begin{aligned} F = \rho A h g &= \left(1\,000 \text{ kg/m}^3\right)(2 \text{ m}^2)(2.8 \text{ m})\left(9.8 \text{ m/s}^2\right) = \\ &= 54\,880 \text{ N}. \end{aligned}$$

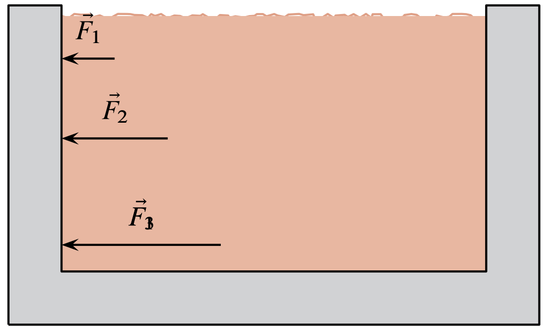
La presión P del fluido sobre dicho lado es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{54\,880 \text{ N}}{2 \text{ m}^2} = 27\,440 \text{ N/m}^2 = 27\,440 \text{ Pa} = 27.44 \text{ kPa}.$$

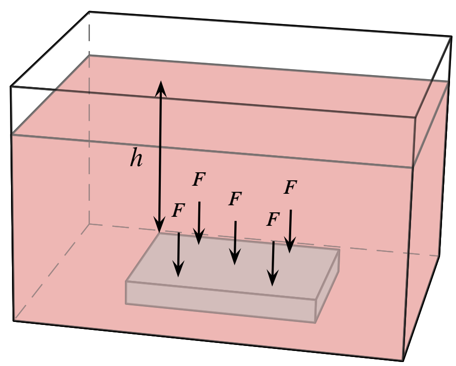
□

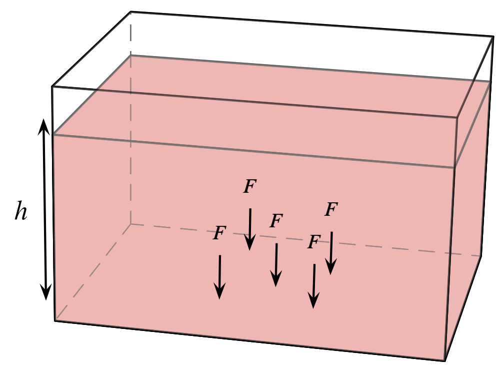
Se ha explicado el cálculo de la fuerza ejercida por un fluido sobre una superficie con profundidad constante. Es preciso aquí, efectuar cálculos directos.
A continuación se explica la manera de calcular la fuerza ejercida por un fluido sobre una superficie con profundidad variable. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un fluido sobre un lado vertical de un objeto o sobre una pared vertical del recipiente que lo contiene.



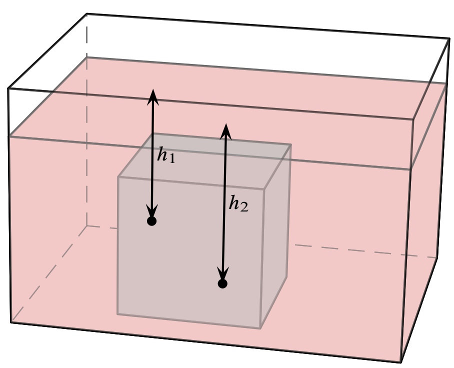


De la expresión para calcular la fuerza de un fluido sobre una superficie $F = \rho Ahg$ se puede apreciar lo siguiente: si toda la superficie de un objeto sumergido en un fluido se encuentra a la misma profundidad sobre el nivel del fluido, la fuerza del fluido sobre todos los puntos de dicha superficie es la misma. Es evidente que se trata de una superficie horizontal y tanto la fuerza como la presión del fluido se pueden calcular con facilidad.
De la misma manera se pueden calcular la fuerza y presión de un fluido sobre el piso o superficie horizontal del recipiente que lo contiene.



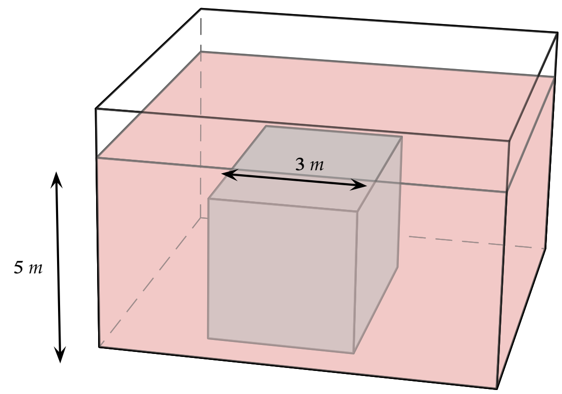


Considerar un poliedro sumergido en el interior de un contenedor lleno de agua, tal y como se muestra en la siguiente figura.



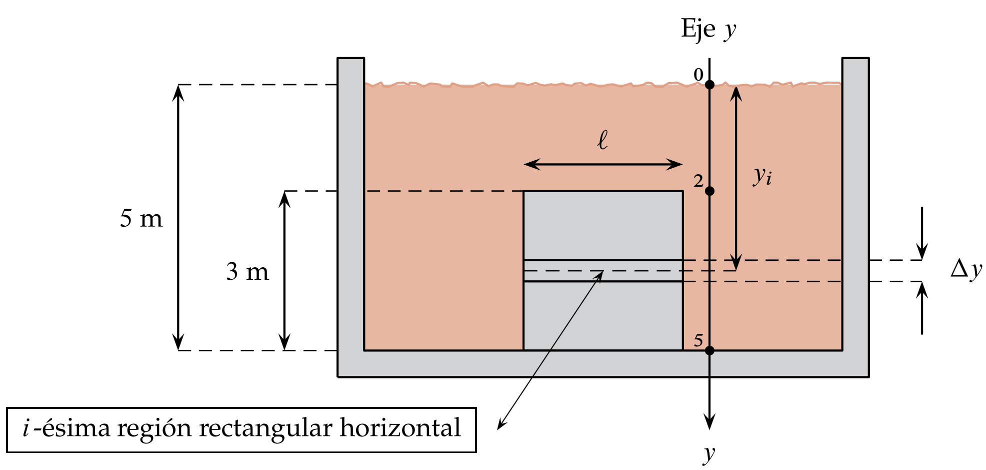
Observe que no todos los puntos sobre las superficies verticales del poliedro se encuentran a la misma profundidad con respecto del nivel del fluido. No en todos los puntos sobre estas superficies se tiene la misma presión P ($P = \rho gh$). En los distinto puntos de la superficie el fluido va a ejercer fuerzas diferentes. Para calcular la fuerza total de un fluido sobre una de las superficies verticales del poliedro mostrado, el procedimiento es diferente. Es necesario utilizar los métodos del cálculo. En particular se debe aplicar algunas ideas del cálculo integral.

Ejemplo 3.6.2 *Calcular la fuerza total del fluido (fuerza hidrostática) sobre una de las superficies verticales de un hexaedro regular (cubo), que se encuentra en el fondo de un tanque con agua, como se muestra en la figura. El nivel del agua es de 5 m y el lado de las caras del cubo mide 3 m. La densidad del agua es $\rho = 1\,000\ kg/m^3$.*



▼ Para este ejercicio se considera como referencia un eje vertical y cuyo origen se encuentra en la superficie del fluido y con sentido positivo hacia abajo.

Se considera también una i-ésima región rectangular horizontal (una franja) con altura Δy y largo ℓ, sobre una de las superficies verticales del cubo, tal como se muestra en la siguiente figura.



El área A_i de esta i-ésima franja es $A_i = \ell\Delta y$. Observe que si Δy es muy pequeña, entonces la presión P_i sobre dicha i-ésima franja es casi constante y se obtiene con la expresión:

$$P_i \approx \rho g y_i\,.$$

Por otra parte, la fuerza total F_i del fluido sobre esta franja es, aproximadamente:

$$\begin{aligned} F_i &= P_i A_i \approx \rho g y_i(\Delta y \cdot \ell) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_i &\approx \rho g \ell y_i \Delta y. \end{aligned}$$

Un conjunto de n franjas cubre la pared vertical del cubo por lo que la fuerza total F del fluido sobre esta superficie vertical es, aproximadamente:

$$
\begin{aligned}
& F \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; & F \approx \sum_{i=1}^{n} P_i A_i \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; & F \approx \sum_{i=1}^{n} \rho g \ell y_i \,\Delta y.
\end{aligned}
$$

En esta última expresión, si el número n de franjas sobre la superficie vertical tiende a ser mayor, la estimación de la fuerza F será mejor.
Por otra parte, si el número n de franjas tiende a infinito:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g \ell y_i \,\Delta y.$$

Considerando lo presentado capítulo I:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g \ell y_i \,\Delta y = \int_a^b \rho g \ell y \; \mathrm{d}y,$$

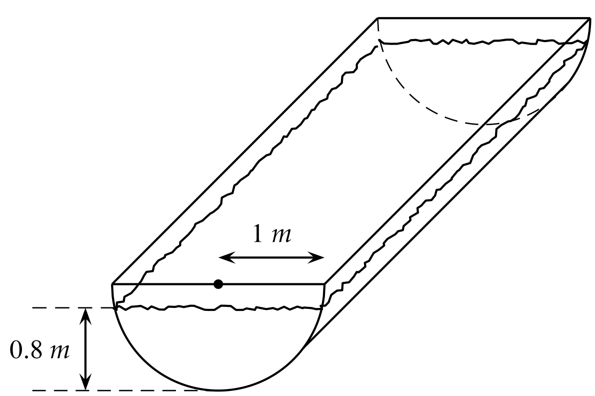
donde los límites de integración a & b son 2 y 5 respectivamente.
El proceso de la evaluación de la integral y la sustitución de los valores es

$$
\begin{aligned}
& F = \int_2^5 \rho g \ell y \; \mathrm{d}y = \rho g \ell \int_2^5 y \; \mathrm{d}y = \rho g \ell \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^5 = \rho g \ell \left[\frac{5^2}{2} - \frac{5^2}{2}\right] \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; & F = \left(1\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(3\ \text{m})\left(\frac{21}{2}\ \text{m}^2\right) \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; & F = 308\,700\ \text{N} = 308.7\ \text{kN}.
\end{aligned}
$$

Este valor representa la fuerza hidrostática total sobre una de las paredes verticales del hexaedro regular.

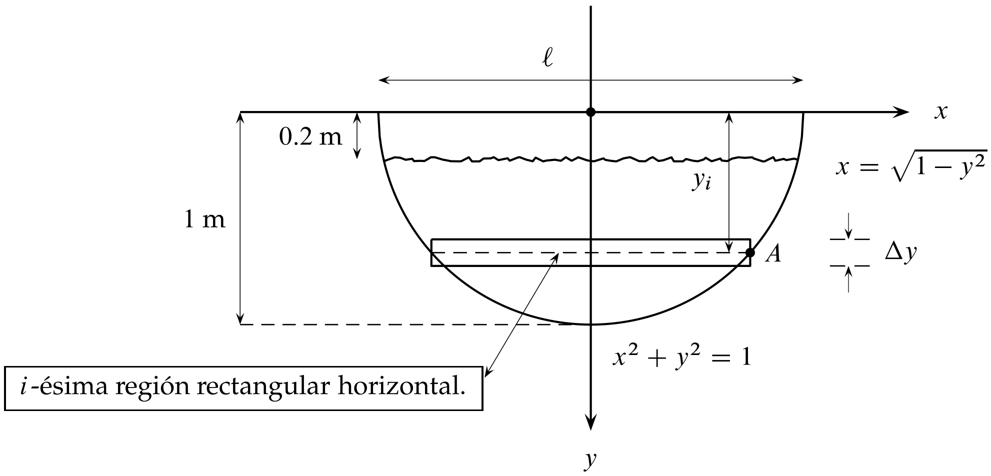
□

Ejemplo 3.6.3 *Las paredes verticales del contenedor que se muestra en la siguiente figura tienen la forma de un semicírculo con un radio de* 1 *m de longitud.*



En el contenedor se encuentra aceite de motor (densidad: 890 *kg/m*^{3} *) cuya altura es de* 80 *cm. ¿Cuál es la fuerza que ejerce el líquido sobre una de las paredes verticales del contenedor?*

▼ Para este ejercicio se representa una de las paredes verticales del contenedor en el plano cartesiano que se muestra a continuación, donde el eje vertical tiene su origen en la parte superior del recipiente y el sentido positivo hacia abajo.
Observe que parte del contorno de la pared vertical es la curva $x^2 + y^2 = 1$ por lo que la abscisa del punto A mostrado en la figura es $x = \sqrt{1 - y^2}$.



Si Δy de la i-ésima región señalada es muy pequeña, entonces la presión P_i sobre dicha región es casi constante y se obtiene con la expresión

$$P_i = \rho g y_i \,.$$

La fuerza total F_i del fluido sobre esta región es, aproximadamente:

$$F_i \approx P_i A_i \,,$$

donde el área de la i-ésima región A_i es

$$A_i = \ell \Delta y = 2\sqrt{1 - y_i^2}\,\Delta y.$$

Entonces:

$$F_i \approx P_i A_i \approx [\rho g y_i] \left[2\sqrt{1 - y_i^2}\right] \Delta y.$$

Un conjunto de n franjas cubre la pared vertical del contenedor, por lo que la fuerza total F del fluido sobre dicha pared es, aproximadamente:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \approx \sum_{i=1}^{n} P_i A_i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \approx \sum_{i=1}^{n} [\rho g y_i] \left[2\sqrt{1 - y_i^2}\right] \Delta y.$$

Si el número n de franjas tiende a infinito, se tiene una mejor estimación de la fuerza:

$$F = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g y_i 2\sqrt{1 - y_i^2}\,\Delta y.$$

Además, tal como se ha explicado anteriormente,

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho g y_i 2\sqrt{1-y^2}\Delta y = \int_a^b \rho g y 2\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \rho g \int_a^b 2y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y,$$

donde los límites de integración son $a = 0.2$ m & $b = 1$ m.
La fuerza F que ejerce el líquido sobre una de las paredes verticales del contenedor es

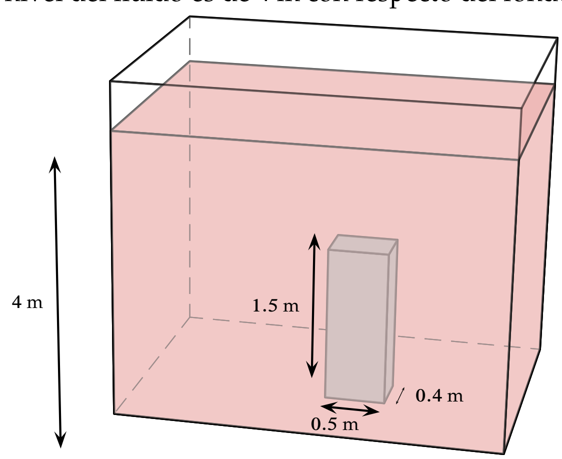
$$F = \underbrace{\rho g \int_{0.2}^{1} 2y\sqrt{1-y^2}}_{\boxed{u = 1-y^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = -2y\,\mathrm{d}y}} = \rho g \left[-\int_{[1-(0.2)^2]}^{0} u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u\right] = \rho g \left[-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{[1-(0.2)^2]}^{0}\right] =$$

$$= \rho g \frac{2\left[1-(0.2)^2\right]}{3} = (890)(9.8)\frac{2\left[1-(0.2)^2\right]}{3} \approx 5.47\text{ kN}.$$

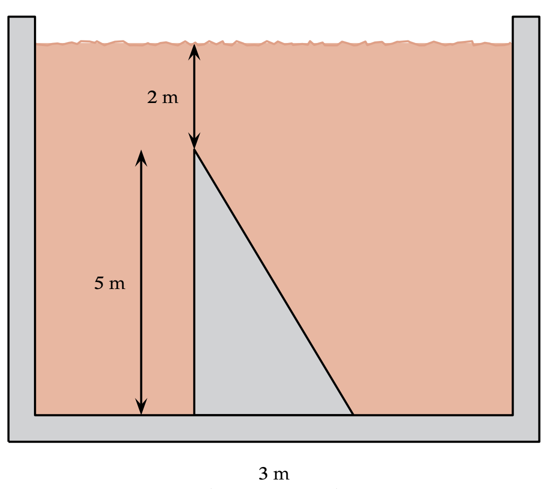
□

Ejercicios 3.6.1 *Presión.* *Soluciones en la página 9*

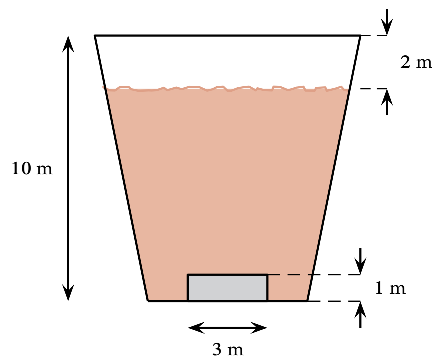
1. Un sólido rectangular, cuyas dimensiones se muestran en la figura, se encuentra sumergido en un recipiente que contiene agua. Determinar la fuerza total del fluido sobre cada una de las superficies verticales del sólido si el nivel del fluido es de 4 m con respecto del fondo del recipiente.



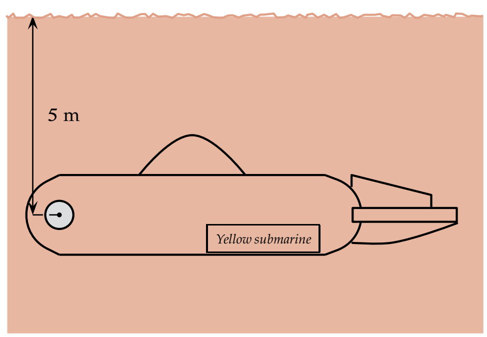
2. Una placa delgada vertical está sumergida en un contenedor con agua como se ve en la siguiente figura. Encontrar la fuerza total del fluido sobre la superficie de la placa.



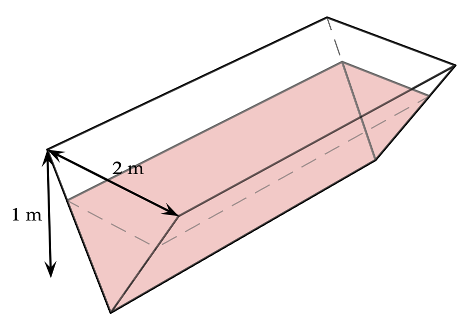
3. ¿Cuál es la fuerza hidrostática que actúa sobre una compuerta rectangular situada en la parte inferior de la cortina vertical de una presa?



4. Una portilla vertical de un submarino es circular con un radio de 40 cm. Si el submarino se encuentra sumergido en agua de mar y la distancia entre el centro de la portilla y el nivel superior del fluido es de 5 m, calcular la fuerza total del fluido sobre la portilla.



5. Tal como se muestra en la figura, las paredes verticales de un tanque que almacena agua tienen la forma de un triángulo equilátero con longitud de 2 m cada lado. Encuentre la fuerza del fluido sobre una de estas superficies cuando la altura del fluido es de 1 m.



Ejercicios 3.6.1 *Presión*. *Preguntas, página 7*

1. 23.89 kN, 19.11 kN.
2. 392 kN.
3. 220.5 kN.
4. 25.37 kN.
5. 60.28 kN.